Hochschule Aachen

Probeklausur Mathematik I für Chemiker und Biologen

WS 02/03 - Prof. C. Schelthoff

(Bitte lösen Sie etwa 14 Aufgaben in den 3h - Rest zuhause)

Zugelassene Hilfsmittel: Taschenrechner, Selbsterstellte Zusammenfassung - Keine Bücher oder Vorlesungsmanuskripte

1.) (6P) Berechnen Sie mittels Horner-Schema f(3) und $g(x) = \frac{f(x)}{x-3} = p(x) + \frac{r(x)}{x-3}$ als Ergebnis der Polynomdivision mit Rest zu

$$f(x) = x^4 - 3x^2 + x - 1$$

2.) (6P) Wie lautet die Zerlegung in Linearfaktoren der Funktion

$$f(x) = x^4 - 9x^3 + 25x^2 - 27x + 10$$

3.) (8P *) Bestimmen Sie das Newton-Interpolationspolynom zu folgender Meßreihe

x_i	1	3	4	7
y_i	0	2	3	0

4.) (6P) Bestimmen Sie die Lösungen von $\sqrt{2-2x} = x - 1$

5) (6P) Berechnen Sie die Ableitung von $f(x) = 2x + 3$ an der Stelle x_0 mit Hilfe des Differenzenquotienten

6) (12P+5P*) Differenzieren Sie:

a) $f(x) = x^2 \cdot \cos(x) + e^x$ b) $f(x) = \sqrt{2x-4}$
c) $f(x) = 2^x \cdot \ln(x)$ d*) $f(x) = 2^{2x+1}$ e) $f(x) = \ln(\frac{a \cdot x^2}{4+b})$

7) (8P) Zwischen x-Achse, y-Aches und der Funktion $f(x) = e^{-x}$ soll ein Rechteck möglichst großer Fläche gelegt werden. Skizzieren Sie zunächst das Problem und lösen Sie diese anschließend mit Hilfe der Differentialrechnung

8) (6P *) Berechnen Sie numerisch für h=0,1 die Ableitung mit dem zentralen und rechtsseitigen Differenzenquotienten der Funktion $f(x) = x \bullet e^x$ an der Stelle $x_0 = 0$.Wie lautet im Vergleich hierzu die exakte Lösung?

9) (10P) Durch welche Parabel lässt sich die Funktion $f(x) = x \bullet \cos(x) + x^2$ im Bereich um $x_0 = 0$ bestmöglich approximieren?

10) (8P) Lösen Sie $e^x = 2$ numerisch mit dem Tangentenverfahren von Newton. Starten Sie bei $x_0 = 0$ und berechnen Sie vier Iterationsschritte.

11) (8P *) Die Funktion $f(x) = 3x + 5$ wird um die x-Achse rotiert. Wie groß ist die hierbei entstehende Mantelfläche im Bereich x=0 bis x=2?

12) (8P) Berechnen Sie $\int_0^1 \frac{1}{x^3+1}\, dx$ numerisch mit n=4 Streifen.

13) (4P) Berechnen Sie das Volumen des Spates aus

$$\vec{F_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \vec{F_2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \text{und } \vec{F_3} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

14) (6P) Wie muß der Parameter λ gewählt werden, damit der Vektor $\vec{F} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 2 \end{pmatrix}$ in der Ebene liegt, die durch die Punkte

$$P_1 = \begin{pmatrix} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \text{und } P_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ geht?}$$

15) a) (8P) Wie weit ist die Ebene

$$E_1 : \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

vom Ursprung entfernt? Und wie lautet die Ebenengleichung in Normalenform?

b) (10P) Wo schneidet die Ebene aus Teil a) die Ebene E_2 mit:

$$E_2: \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

16) Auf dem Einheitskreis bewege sich ein Punkt mit $\overrightarrow{x(t)} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$. Weiterhin ist ein ortsabhängiges Kraftfeld gegeben mit $\overrightarrow{F(x,y)} = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) (2P) Skizzieren Sie den Weg von $t = 0$ bis $t = \frac{\pi}{2}$.

b) (9P *) Welche Arbeit wird verrichtet, wenn der Massenpunkt durch dieses Kraftfeld bewegt wird?

17) (10P) Berechnen Sie zu $f(x) = x^2 \bullet \ln(x)$ das vollständige Differential in $x_0 = 2$. Geben Sie Näherungen für die Stellen $x = 1{,}9$ und $x = 2{,}2$ mit Hilfe des Differentials an.

18) (12P) Berechnen Sie

a) $\int_1^2 x^2 \bullet \ln(x^3 + 1)dx$ b) $\int (x^3 - 2) \bullet \ln(x)dx$ c) $\int \frac{x^3-3x+1}{(x-1)^2 \bullet x} dx$

19) (6P) Berechnen Sie den Grenzwert von $\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{\sin(x) - x}$

20) (3P *) Bitte beschreiben Sie: Wann verwendet man numerische Integration statt Stammfunktion?

21) (8P) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle n≥ 1 gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} 1 + 2 \bullet i = n^2 + 2 \bullet n$$

Viel Erfolg! Musterlösung: Morgen 9:15 Fragestunde: 11. März, 10 Uhr A02!

Musterlösung Probeklausur

1) Horner

	1	0	-3	1	-1
$x_0 = 3$	X	$\cdot 3$ 3	$\cdot 3$ 9	$\cdot 3$ 18	$\cdot 3$ 57
	1	3	6	19	$\underline{56}$

$\uparrow$ $f(3)$

a) $f(3) = 56$

b) $g(x) = 1 \cdot x^3 + 3x^2 + 6x + 19 + \frac{56}{x-3}$

a) $x^4 - 9x^3 + 25x^2 - 27x + 10 : (x-1) = x^3 - 8x^2 + 17x - 10$

$$
\begin{aligned}
f(x) \quad & -(x^4 - x^3) \\
& \quad -8x^3 + 25x^2 \\
& \quad -(-8x^3 + 8x^2) \\
& \qquad 17x^2 - 27x \\
& \qquad -(17x^2 - 17x) \\
& \qquad\quad -10x + 10 \\
& \qquad\quad -(-10x + 10) \\
& \qquad\qquad 0
\end{aligned}
$$

$x^3 - 8x^2 + 17x - 10 : (x-1) = \underline{x^2 - 7x + 10}$

$$
\begin{aligned}
& -(x^3 - x^2) \\
& \quad -7x^2 + 17x \\
& \quad -(-7x^2 + 7x) \\
& \qquad 10x - 10 \\
& \qquad -(10x - 10) \\
& \qquad\quad 0
\end{aligned}
$$

$x^2 - 7x + 10 = 0$

$x_{1/2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 10}$

$\Rightarrow x_1 = 5$

$x_2 = 2$

$\Rightarrow f(x) = (x-1)^2 \cdot (x-5)(x-2)$

3) $f(x) = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)(x-3) + a_3(x-1)(x-3)(x-4)$

x_i	$f(x_i)$			
1	$\boxed{0} = a_0$			
		$\frac{2-0}{3-1} = \boxed{1} = a_1$		
3	2		$\frac{1-1}{4-1} = \boxed{0} = a_2$	
		$\frac{3-2}{4-3} = 1$		$\frac{-\frac{1}{2}-0}{7-1} = \boxed{-\frac{1}{12}} = a_3$
4	3		$\frac{-1-1}{7-3} = -\frac{1}{2}$	
		$\frac{0-3}{7-4} = -1$		
7	0			

$$\Rightarrow f(x) = 0 + (x-1) + 0 \cdot (x-1)(x-3) + \left(-\tfrac{1}{12}\right) \cdot (x-1)(x-3)(x-4)$$

$$= x - 1 - \frac{1}{12}(x-1)(x-3)(x-4)$$

4) $\sqrt{2-2x} = x - 1 \qquad \big|\ (\ )^2$ - keine Äquivalenz

$2 - 2x \quad (x-1)^2 \iff x^2 - 2x + 1 = 2 - 2x$

$\iff x^2 - 1 = 0 \iff x = 1$ oder $x = -1$

Probe: $x = 1$: $\sqrt{2-2} = 0 \qquad 1 - 1 = 0$ ✓

$x = -1$ $\sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2 \qquad -1-1 = -2$ ƒ

$\Rightarrow L = \{x \mid x = 1\} = \{1\}$

5) $$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$ P3

$f(x) = 2x + 3$ $$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{2 \cdot (x_0+h) + 3 - (2 \cdot x_0 + 3)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2x_0 + 2h + 3 - 2x_0 - 3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h}{h} = 2$$

6) a) $f(x) = \underbrace{x^2 \cos(x)}_{\text{Prod.regel}} + e^x \Rightarrow f'(x) = 2x\cos(x) - x^2 \sin(x) + e^x$

b) $f(x) = \sqrt{2x-4}$ $u(x) = 2x - 4$

$u' = 2$ $f(u) = \sqrt{u}$ $f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}$

$$f'(u(x)) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2x-4}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x-4}} = \frac{1}{\sqrt{2x-4}}$$

c) $f(x) = 2^x \cdot \ln(x) \Rightarrow f'(x) = 2^x \cdot \frac{1}{x} + \ln(2) 2^x \cdot \ln(x)$

Bem.: $(2^x)' = \ln(2) \cdot 2^x$

d) $f(x) = 2^{2x+1} = 2^{2x} \cdot 2^1 = 2 \cdot 2^{2x} = 2 \cdot (2^2)^x = 2 \cdot 4^x$

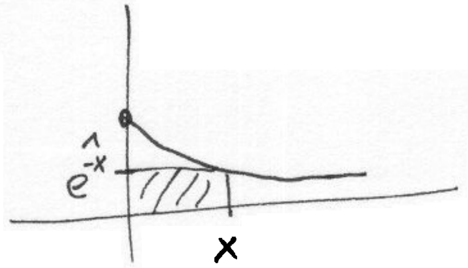
$\Rightarrow f'(x) = 2 \cdot \ln(4) \cdot 4^x$

e.) $f(x) = \ln\left(\frac{ax^2}{4+b}\right) = \ln(ax^2) + \ln(4+b) = \ln(a) + \ln(x^2) + \ln(4+b)$

$= \ln(a) + 2\ln(x) + \ln(4+b)$

$\Rightarrow f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{x}$

7)



Fläche

$$F(x) = x e^{-x}$$

Optimum: $F'(x)=0$

$$F'(x) = e^{-x} - x e^{-x} = (1-x) e^{-x} = 0$$

$$\Rightarrow 1-x=0 \Rightarrow x=1$$

$e^{-x}>0$

$$F''(x) = -(1-x)e^{-x} - e^{-x} \Rightarrow F''(1) = -e^{-1} = -\frac{1}{e} < 0$$

$\Rightarrow$ lok. Maximum

Fläche $F(1) = 1 \cdot e^{-1} = \underline{\underline{\frac{1}{e}}}$

8) $h=0{,}1$ $\qquad f(x) = xe^{x}$ $\qquad x_0=0$

rechtsseitig:
$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{f(0{,}1)-f(0)}{0{,}1}$$

$$= \frac{0{,}1 \cdot e^{0{,}1} - 0 \cdot e^{0}}{0{,}1} = e^{0{,}1} = \underline{\underline{1{,}105}}$$

zentral:
$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} = \frac{f(0{,}1)-f(-0{,}1)}{0{,}2}$$

$$= \frac{0{,}1 \cdot e^{0{,}1} - (-0{,}1)e^{-0{,}1}}{0{,}2} = \frac{1}{2}\left(e^{0{,}1}+e^{-0{,}1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1{,}105+0{,}905\right) = \frac{1}{2} \quad 2{,}01 = \underline{\underline{1{,}005}}$$

exakt: $f'(x) = xe^{x}+e^{x} \Rightarrow f'(0) = \underline{\underline{1}}$

9) $f(x) = x \cos(x) + x$

Taylorentw. um $x_0 = 0$

$f_2(x) = f(0) + x \cdot f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0)$

$f(0) = 0 \cdot 1 + 0 = 0$

$f'(x) = -x \sin(x) + \cos(x) + 2x \Rightarrow f'(0) = 1$

$f''(x) = -x\cos(x) - \sin(x) \overset{-\sin(x)}{\cancel{+\cos(x)}} + 2 \Rightarrow f''(0) = 2$

$\Rightarrow f_2(x) = 0 + 1 \cdot x + \frac{x^2}{2} \cdot 2 = \underline{\underline{x^2 + x}}$

10) $e^x = 2 \iff \underbrace{e^x - 2}_{f(x)} = 0 \qquad f'(x) = e^x$

Newton

$x_{n+1} = x_n - \frac{\overbrace{e^{x_n} - 2}^{f(x_n)}}{\underbrace{e^{x_n}}_{f'(x_n)}}$

n	x_n	e^{x_n}	$x_{n+1} = x_n - \frac{e^{x_n} - 2}{e^{x_n}}$
0	0	1	$0 - \frac{1-2}{1} = 1$
1	1	2,71	$1 - \frac{0,71}{2,71} = 0,738$
2	0,738	2,092	$0,738 - \frac{0,092}{2,092} = 0,694$
3	0,694	2,002	$0,694 - \frac{0,002}{2,002} = 0,694$
4	$\underline{\underline{0,694}}$	X	X

11| $f(x)=3x+5$ $\quad f'(x)=3$

$$O_0^2(3x+5)=\int_0^2 2\pi\,(3x+5)\cdot\sqrt{1+3^2}\,dx$$

$$=\int_0^2 2\pi\sqrt{10}\cdot(3x+5)\,dx=2\pi\sqrt{10}\cdot\left[3\frac{x^2}{2}+5x\right]$$

$$=2\pi\sqrt{10}\cdot(6+10)=32\pi\cdot\sqrt{10}\approx 317{,}9$$

12| $n=4 \Rightarrow h=\frac{1-0}{4}=0{,}25$

i	x_i	$f(x_i)=\frac{1}{x_i^3+1}$
0	0	1
1	0,25	0,985
2	0,5	0,889
3	0,75	0,703
4	1	0,5

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{x^3+1}\,dx \approx 0{,}25\cdot\left(\frac{1+0{,}5}{2}+0{,}985+0{,}889+0{,}703\right)$$

$$=\underline{\underline{0{,}83175}}$$

3|

$$V = |\vec{F_1} \cdot (\vec{F_2} \times \vec{F_3})|$$

$$\vec{F_2} \times \vec{F_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F_1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = 2 + 6 + 4 = \underline{\underline{12}}$$

$\Rightarrow \underline{\underline{V = 12}}$ Das Volumen des Spates beträgt 12 Einh.

14| $E: \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ „Punkt-Richtungsform"

$$\Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 2 \end{pmatrix}$ liegt in der Ebene falls $\vec{n} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 2 \end{pmatrix}$ bzw.

$$\vec{n} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -2 + 2\lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{\lambda = 2}}$$

5| a) Normale $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$; $\|\vec{n}\| = \sqrt{16 + 16 + 64} = \sqrt{96}$

Ebenengleichung $\vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -4x + 4y + 8z = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow -4x + 4y + 8z = 8$$

$$d = \frac{\left|\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right|}{\sqrt{96}} = \frac{|4 - 12|}{\sqrt{96}} = \frac{8}{\sqrt{96}} = \sqrt{\frac{64}{96}} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{2}{3}}}}$$

b) $$\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix} + \alpha_1\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + \beta_1\begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}-2\\0\\5\end{pmatrix} + \beta_2\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$2\alpha_1 + 2\alpha_2 - \beta_2 = 1$$

$$4\beta_1 + \beta_2 = -5$$

$$\alpha_1 + 2\beta_1 - 5\alpha_2 = 0$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -5 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & -6 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

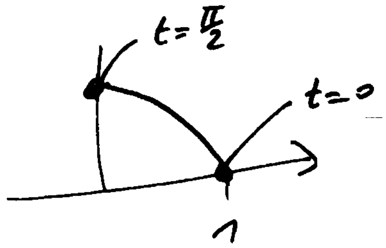
$$\beta_2 = \lambda$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 2 & & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & -4 \end{array}\right) \Rightarrow 12\alpha_2 = -4 \rightarrow \alpha_2 = -\frac{1}{3}$$

$\xrightarrow{\text{in } E_2}$: Schnitt: $$\vec{g} = \begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\0\\5\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}8/3\\-2\\-\frac{5}{3}\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

16| $\vec{x}(t) \quad \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$



$$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2+y^2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{x}\,'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow W = \int_0^{\pi/2} \vec{F}\left(\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} dt$$

$$\int_0^{\pi/2} \begin{pmatrix} \cos^2(t)+\sin^2(t) \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} dt$$

$$\int_0^{\pi/2} -\sin(t) \quad 2\cos(t)\, dt = \Big[\cos(t)+2\sin(t)\Big]_0^{\pi/2}$$

$$= \cos(\tfrac{\pi}{2}) + 2\sin(\tfrac{\pi}{2}) - \cos(0) - 2\sin(0)$$

$$= 0 + 2\cdot 1 - 1 - 0 = \underline{\underline{1}}$$

17| $f(x) = x^2 \cdot \ln(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{df}{dx} = f'(x) = x^2 \cdot \frac{1}{x} + 2x \cdot \ln(x) = x + 2x\ln(x)$

$$\Rightarrow df = x + 2x\ln(x)\, dx \qquad \Delta f = x_0 + 2x_0\ln(x_0) \quad \Delta x$$

$x_0 = 2 \Rightarrow \quad f(2) = 4 \cdot \ln(2) = 4 \cdot 0{,}693 = 2{,}782$ Funktionswert

Differential in $x_0 = 2$:

$$df = (2 + 4\ln(2))\,dx$$
$$df = 4{,}782 \cdot dx$$
$$\Delta f = 4{,}782 \cdot \Delta x$$

$x = 1{,}9 \Rightarrow \Delta x = x - x_0 = 1{,}9 - 2 = -0{,}1$

$\Rightarrow \Delta f = 4{,}782 \cdot (-0{,}1) = -0{,}4782$

$\Rightarrow f(1{,}9) \approx 2{,}782 - 0{,}4782 = \underline{\underline{2{,}304}}$

$x = 2{,}2 \Rightarrow \Delta x = 0{,}2 \Rightarrow \Delta f = 4{,}782 \cdot 0{,}2 = 0{,}9564$

$\Rightarrow f(2{,}2) \approx 2{,}782 + 0{,}9564 = \underline{\underline{3{,}738}}$

$\underline{18|}$ a) $\int_1^2 x^2 \cdot \ln(x^3+1)\,dx = \frac{1}{3}\int_1^2 3x^2 \cdot \ln(x^3+1)\,dx$

$= \frac{1}{3} \cdot \int \ln(u)\,du = \frac{1}{3}\, u \cdot (\ln(u) - 1) + C$

$u = x^3+1$

$\frac{du}{dx} = 3x^2$

$du = 3x^2 dx$

$= \frac{1}{3}\,(x^3+1) \cdot \left(\ln(x^3+1) - 1\right)\Big]_1^2$

$= \frac{1}{3} \cdot \left(9 \cdot (\ln(9) - 1) - 2 \cdot (\ln(2) - 1)\right) = \frac{1}{3} \cdot (10{,}775 + 0{,}614)$
$= \underline{\underline{3{,}39}}$

b) $\int (x^3 - 2) \ln(x)\,dx = \cancel{3x^2 \cdot \ln(x) - \int 3x^2 \cdot \frac{1}{x}\,dx}$

v' (under x^3-2), u (under $\ln(x)$)

$\cancel{= 3x^2 \ln(x) - \int 3x\,dx}$

$\cancel{= 3x^2 \ln(x) - \frac{3}{2}x^2 + C}$

$v = \cancel{3x^2}\ \frac{x^4}{4} - 2x \qquad u' = \frac{1}{x}$

$= \left(\frac{x^4}{4} - 2x\right)\ln(x) - \int \left(\frac{x^4}{4} - 2x\right) \cdot \frac{1}{x}\,dx$

$= \left(\frac{x^4}{4} - 2x\right)\ln(x) - \int \frac{x^3}{4} - 2\,dx$

$= \left(\frac{x^4}{4} - 2x\right)\ln(x) - \frac{x^4}{16} + 2x + C$

18 c) $\int \frac{x^3-3x+1}{(x-1)^2 \cdot x} \, dx$ -P11

$$(x-1)^2 \cdot x = (x^2-2x+1) \cdot x$$
$$= x^3-2x^2+x$$

Polynomdiv.:

$$x^3-3x+1 : x^3-2x^2+x = 1$$
$$\frac{(x^3-2x^2+x)}{2x^2-4x+1}$$

$$\Rightarrow \frac{x^3-3x+1}{(x-1)^2 \cdot} = 1 + \frac{2x^2-4x+1}{(x-1)^2 \cdot x}$$

Partialbruchzerlegung von

$$\frac{2x^2-4x+1}{(x-1)^2 \cdot x} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{(x-1)^2}$$

$$2x^2-4x+1 = A_1 (x-1)^2 + A_2 x \cdot (x-1) + A_3 \, x$$

$x=0$: $1 = A_1$

$=1$: $-1 = A_3$

$x=$: $1 = A_1 + 2A_2 + A_3 = 1 + 2A_2 - 2 \Rightarrow A_2 = 1$

$$\Rightarrow \int \frac{x^3-3x+1}{(x-1)^2} \, dx = \int 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} \, dx$$

$$= x + \ln|x| + \ln|x-1| + \frac{1}{x-1} + c$$

-P12-

19/ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3 \nearrow 0}{\sin(x) - x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{3x^2}{\cos(x) - 1} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{6x}{-\sin(x)}$

$\searrow 0 \qquad \searrow 0 \qquad \searrow 0$

$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{6}{-\cos(x)} \quad \frac{6}{-1} = \underline{\underline{-6}}$

20/ Wenn die Stammfunktion nicht zu berechnen ist oder wenn das Integral innerhalb eines Programms ohne ~~B~~ bekannter Stammfunktion entsteht und gelöst werden muß.

21/ $\sum\limits_{i=1}^{n} 1+2i = n^2 + 2n$

Ind. Anfang $\quad n=1: \sum\limits_{i=1}^{1} 1+2i = 1+2 = 3$

$1+2 = 3$ ✓

Ind. Vor: Für alle n ist $\sum\limits_{i=1}^{n} 1+2i = n^2 + 2n$

Ind. schluß z.z.: $\sum\limits_{i=1}^{n+1} 1+2i \quad (n+1)^2 + 2(n+1)$

$\sum\limits_{i=1}^{n+1} 1+2i = \underbrace{\sum\limits_{i=1}^{n} 1+2i}_{\text{I.Vor.}} + 1+2\cdot(n+1) \quad n^2+2n + 1 + 2\cdot(n+1)$

$= (n+1)^2 + 2\cdot(n+1)$

✓