Hochschule Aachen Probeklausur Mathematik I für Chemiker und Biologen

(Bitte lösen Sie etwa 14 Aufgaben in den 3h - Rest zuhause)

Zugelassene Hilfsmittel: Taschenrechner, Selbsterstellte Zusammenfassung - Keine Bücher oder Vorlesungsmanuskripte

1.) (6P) Berechnen Sie mittels Horner-Schema f(3) und $g(x) = \frac{f(x)}{x-3} = p(x) + \frac{r(x)}{x-3}$ als Ergebnis der Polynomdivision mit Rest zu

$$f(x) = x^4 - 3x^2 + x - 1$$

2.) (6P) Wie lautet die Zerlegung in Linearfaktoren der Funktion

$$f(x) = x^4 - 9x^3 + 25x^2 - 27x + 10$$

3.) (8P *) Bestimmen Sie das Newton-Interpolationspolynom zu folgender Meßreihe

x_i	1	3	4	7
y_i	0	2	3	0

4.) (6P) Bestimmen Sie die Lösungen von $\sqrt{2-2x} + 1 = x$

5) (6P) Berechnen Sie die Ableitung von $f(x) = 2x + 3$ an der Stelle x_0 mit Hilfe des Differenzenquotienten

6) (12P+5P*) Differenzieren Sie:

a) $f(x) = x^2 \cdot \cos(x) + e^x$ b) $f(x) = \sqrt{2x-4}$
c) $f(x) = 2^x \cdot \ln(x)$ d*) $f(x) = 2^{2x+1}$ e) $f(x) = \ln(\frac{a \cdot x^2}{4+b})$

7) (8P) Zwischen x-Achse, y-Aches und der Funktion $f(x) = e^{-x}$ soll ein Rechteck möglichst großer Fläche gelegt werden. Skizzieren Sie zunächst das Problem und lösen Sie diese anschließend mit Hilfe der Differentialrechnung

8) (6P *) Berechnen Sie numerisch für h=0,1 die Ableitung mit dem zentralen und rechtsseitigen Differenzenquotienten der Funktion $f(x) = x \cdot e^x$ an der Stelle $x_0 = 0$.Wie lautet im Vergleich hierzu die exakte Lösung?

9) (10P) Durch welche Parabel lässt sich die Funktion $f(x) = x \cdot \cos(x) + x^2$ im Bereich um $x_0 = 0$ bestmöglich approximieren?

10) (8P) Lösen Sie $e^x = 2$ numerisch mit dem Tangentenverfahren von Newton. Starten Sie bei $x_0 = 0$ und berechnen Sie vier Iterationsschritte.

11) (8P *) Die Funktion $f(x) = 3x + 5$ wird um die x-Achse rotiert. Wie groß ist die hierbei entstehende Mantelfläche im Bereich x=0 bis x=2?

12) (8P) Berechnen Sie $\int_0^1 \frac{1}{x^3+1}\,dx$ numerisch mit n=4 Streifen.

13) (4P) Berechnen Sie das Volumen des Spates aus

$$\vec{F_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}; \qquad \vec{F_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad \text{und} \quad \vec{F_3} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

14) (6P) Wie muß der Parameter λ gewählt werden, damit der Vektor $\vec{F} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 2 \end{pmatrix}$ in der Ebene liegt, die durch die Punkte

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad \text{und } P_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$ geht?

15) a) (8P) Wie weit ist die Ebene

$$E_1: \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$ vom Ursprung entfernt?

Und wie lautet die Ebenengleichung in Normalenform?

b) (10P) Wo schneidet die Ebene aus Teil a) die Ebene E_2 mit:

$$E_2: \qquad \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

16) Auf dem Einheitskreis bewege sich ein Punkt mit $\overrightarrow{x(t)} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$.
Weiterhin ist ein ortsabhängiges Kraftfeld gegeben mit $\overrightarrow{F(x,y)} = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) (2P) Skizzieren Sie den Weg von $t = 0$ bis $t = \frac{\pi}{2}$.

b) (9P *) Welche Arbeit wird verrichtet, wenn der Massenpunkt durch dieses Kraftfeld bewegt wird?

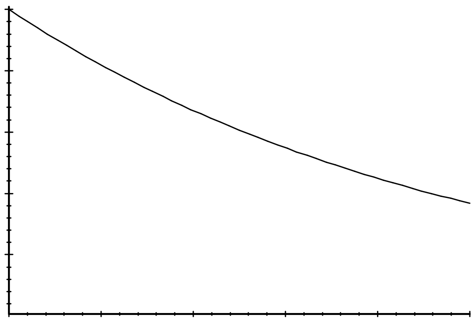
17) (10P) Berechnen Sie zu $f(x) = x^2 \cdot \ln(x)$ das vollständige Differential in $x_0 = 2$. Geben Sie Näherungen für die Stellen $x = 1,9$ und $x = 2,2$ mit Hilfe des Differentials an.

18) (12P) Berechnen Sie

a) $\int_1^2 x^2 \cdot \ln(x^3+1)dx$ b) $\int (x^3-2)\cdot \ln(x)dx$ c) $\int \frac{x^3-3x+1}{(x-1)^2\cdot x}dx$

19) (6P) Berechnen Sie den Grenzwert von $\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\sin(x)-x}$

20) (6P) Ein Fahrzeug bremst aus einer Geschw. v_0 ab. Dieser Vorgang werde beschrieben durch die Geschwindigkeitsfunktion $v(t) = v_0 \cdot e^{-0,2t}$.



Zeigen Sie, dass dieser Ansatz plausibel ist, also zum Zeitpunkt $t=0$ gerade die Geschwindigkeit v_0 liefert. Wie lauten die Weg-Zeit-Funktion mit $s(0)=0$ und die Beschleunigungs-Zeit Funktion? Fährt das Fahrzeug beliebig weit? Die Geschwindigkeit ist ja stets positiv. (Berechnen Sie den Grenzwert $s(t)$ für t$\to\infty$)

21) (8P) Bei der chem. Reaktion

$$x\cdot Ca_{10}F_2P_6O_{24} + y\cdot H_2SO_4 \to u\cdot CaH_2P_2O_8 + v\cdot CaSO_4 + w\cdot HF$$

messen wir einen Reaktionsoutput von 6 Anteilen HF. In welchen Mengen sind die anderen Reaktionsstoffe (Input und Output) vorhanden gewesen?

22) (3P) Berechnen Sie die Summe $s = \sum_{i=10}^{17} 2^i$

23) (6P) Der Druck p eines Kolbens über die Zeit $t>0$ sei gegeben durch

$$p(t) = \ln(\alpha t) - t$$

Zu welchem Zeitpunkt wird der Druck maximal und welchen Wert nimmt er dort an?