Hochschule Aachen

Probeklausur Mathematik I für Chemiker und Biologen

Zugelassene Hilfsmittel: Taschenrechner, Selbsterstellte Zusammenfassung - Keine Bücher oder Vorlesungsmanuskripte

1. Wir betrachten die Funktion $f(x) = x \cdot e^{-x}$

a) Wie lautet die Ableitung dieser Funktion?

b) Wie lautet die Stammfunktion dieser Funktion? Wie lautet das Integral der Funktion über den Bereich von -1 bis 1?

c) Berechnen Sie in $x_0 = 0$ die Taylorentwicklung dieser Funktion bis zum quadratischen Term. Wie lautet die (unendliche) Taylorreihe?

Integrieren Sie die quadratische Funktion statt der ursprünglichen zwischen -1 und 1, vergleichen Sie die Ergebnisse und beurteilen diese.

d) Berechnen Sie die Länge der Funktion auf dem Abschnitt von $a = -1$ bis $b = 1$. Lösen Sie das auftretende Integral näherungsweise mit n=5 Intervallen.

e) Wo wird die Funktion den Wert -1 annehmen? Lösen Sie das auftretende Nullstellenproblem mit dem Startwert $x_0 = -1$ und rechnen Sie mit 3 Dezimalen 3 Iterationsschritte aus.

2. Wir betrachten die Messreihe

t	1	3	4	7
v(t)	0	2	3	0

a) Wie lautet an der Stelle t=3 die Beschleunigung a(t) mit Hilfe des rechtsseitigen Differenzenquotienten?

b) Legen Sie durch die Punkte ein Interpolationspolynom $v_3(t)$ mit Hilfe der dividierten Differenzen. Multiplizieren Sie dieses (ausnahmsweise) aus.

Wie lautet die Ableitung dieses Polynoms an der Stelle t=3 ?

Vergleichen Sie die Ergebnisse

c) Integrieren Sie nun die Funktion (das Interpolationspolynom) exakt im Intervall von t=0 bis 1. Welche Grösse haben Sie damit berechnet?

3. Um einen Punkt im zweidimensionalen Koordinatensystem vom Ursprung $P_1 = (0,0)$ in den Punkt $P_2 = (4,3)$ zu bringen, ist an jeder Stelle seine Gewichtskraft $\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ mg \end{pmatrix}$ zu überwinden. Wie lautet der Wegvektor $\vec{s}$ die in Richtung des Weges zeigende Projektion $\vec{F_s}$ und die geleistete Arbeit W?

4. Wir betrachten die Preisentwicklung eines PC's und beobachten, dass dieser im Monat 0 einen Preis von $y(0)$ =800 € hatte, zwei Monate darauf $y(2) = 700$€

a) verwenden Sie das Modell des ungebremsten Wachstums und berechnen Sie die Wachstumskoeffizienten k für das diskrete und kontinuierliche Modell. Welchen Preis haben Sie nach diesen Modellen nach einem Jahr für diesen Rechner zu zahlen?

b) Die Preisentwicklung wird nun so modifiziert, dass ein Abgabepreis von 100€ nicht unterschritten wird und der Wertezerfall proportional zum Abstand zu 100€ ist. Bestimmen Sie nun mit dem diskreten, ressourcenorientierten Modell des Zerfalls mit Störung erster Ordnung den Wachstumskoeffizienten und damit die Prozessgleichung. Welchen Preis haben Sie mit diesem Modell nach einem Jahr zu zahlen?

5. Zu Beginn einer Grippeepidemie mit $y(0) = 10$ Infizierten infiziere jeder Bürger (keiner wird genesen) täglich 3 weitere Bürger seiner Kleinstadt mit $R = 30000$ Einwohnern. Wie lautet im diskreten Modell mit $\Delta t = 1$ Tag der Wachstumsfaktor k im Modell

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = k \cdot y \cdot (R - y)$$

Wieviele Bürger werden nach 5/6 und nach 10 Tagen infiziert sein? Wann wird die halbe Stadt infiziert sein?

6. (Vorsicht gemein !) Sie fahren eine Runde (sollte dies Schwierigkeiten bereiten, nehmen sie statt dessen an: "1 km") auf dem Nürburgring mit einer Druchschnittsgeschwindigkeit von 50 km/h. Wie schnell (mit welcher Geschwindigkeit) müssen Sie die zweite Runde fahren damit Sie auf eine Gesamtdurchschnittsgeschwindigkeit von 100 km/h kommen? Wie schnell, damit Sie auf 80 km/h Durchschnittsgeschwindigkeit kommen?

1) a) Produktregel

$$f'(x) = e^{-x} + x(-e^{-x}) = (1-x)e^{-x}$$

b) $\int \underset{u}{x}\,\underset{v'}{e^{-x}}$ Partielle Integration

$$= -xe^{-x} + \int e^{-x} = -xe^{-x} - e^{-x} + C = e^{-x}(-x-1) + c$$

$$\int_{-1}^{1} xe^{-x}\,dx = e^{-x}(-x-1)\Big]_{-1}^{1} = -\frac{2}{e}$$

c) $$f_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}\cdot x^2$$

$f(x) = xe^{-x}$ $f(0) = 0$

$f'(x) = (1-x)e^{-x}$ $f'(0) = 1$

$f''(x) = -(1-x)e^{-x} - e^{-x}$ $f''(0) = -2$

$$\Rightarrow f_2(x) = x - x^2$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} x - x^2\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big]_{-1}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3}$$

vgl. zu $-\frac{2}{e}$ ✓

d) $$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \left((1-x)e^{-x}\right)^2}\,dx$$

d) Forts.

$n=5 \Rightarrow$

$5 = 0{,}4$

i	x_i	$\sqrt{1+((1-x)e^{-x})^2}$	
0	-1	5,528	
1	-0,6	3,082	
2	-0,2	1,774	
3	0,2	1,195	7,075
4	0,6	1,024	
5	1	1	

$\Rightarrow I = 0{,}4 \cdot \left(\frac{5{,}528+1}{2} + 7{,}075\right) = \underline{\underline{4{,}1356}}$

e) $\underbrace{xe^{-x}+1}_{f(x)} = 0$ $\qquad f'(x) = (1-x)e^{-x}$

i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	x_{i+1}
0	-1	-1,718	5,437	-0,684
1	-0,684	-0,356	3,337	-0,577
2	-0,577	-0,027	2,808	-0,567
3	-0,567	0,0004	x	x

2\. a) $Q(t) = v'(t)$

$$\Rightarrow \quad a(t) = \frac{v(4)-v(3)}{1} = 1$$

$h=1$
$t=3$

b) $$\hat{v}(t) = 0 + 1 \cdot (t-1) + 0 \cdot (t-1)(t-3) - \frac{1}{12}(t-1)(t-3)(t-4)$$

1	$\boxed{0}$
3	2
4	3
7	0

$\frac{2-0}{3-1} = \boxed{1}$, $\frac{3-2}{4-3} = 1$, $\frac{0-3}{7-4} = -1$

$\frac{0}{4-1} = 0$, $\frac{-2}{7-3} = -\frac{1}{2}$

$\frac{-\frac{1}{2}-0}{7-1} = -\frac{1}{12}$

$$\hat{v}_3(t) = t-1 - \frac{1}{12}(t-1)(t^2-7t+12)$$

$$= t-1 - \frac{1}{12}(t^3-7t^2+12t-t^2+7t-12)$$

$$= t-1 - \frac{1}{12}t^3 + \frac{2}{3}t^2 - \frac{19}{12}t + 1$$

$$= -\frac{1}{12}t^3 + \frac{2}{3}t^2 - \frac{7}{12}t$$

$$V_3'(t) = -\frac{1}{4}t^2 + \frac{4}{3}t - \frac{7}{12} \Rightarrow V_3'(3) = -\frac{9}{4} + 4 - \frac{7}{12}$$

$$= \frac{-27+48-7}{12} = \frac{14}{12} = \frac{7}{6} = \underline{\underline{1{,}16}}$$

o.k.

c) $$s(t) = \int_0^1 -\frac{1}{12}t^3 + \frac{2}{3}t^2 - \frac{7}{12}t \, dt$$

$$= -\frac{1}{48}t^4 + \frac{2}{9}t^3 - \frac{7}{24}t^2 \Big]_0^1 = -\frac{1}{48} + \frac{2}{9} - \frac{7}{24} = \frac{2}{9} - \frac{15}{48}$$

$$= -0{,}2923$$

3. $$\vec{s} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ mg \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad W = \vec{F} \cdot \vec{s} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ mg \end{pmatrix} = 3mg$$

$$\vec{F}_s = \frac{\vec{F} \cdot \vec{s}}{\|\vec{s}\|^2} \cdot \vec{s} = \frac{3mg}{25} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12}{25} mg \\ \frac{9}{25} mg \end{pmatrix}$$

$n=2$

	Heute:	2 Mon
PC	800 €	700 €

1. Diskret: $y_0 = 800$

$$700 = y_2 = 800\ (1+k)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{7}{8}} - 1 = k \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{k = -0{,}0646}}$$

$n=12$: $y_{12} = 800 \cdot 0{,}935^{12} = 359{,}03$

2. Kontinuierlich $y(0) = 800$

$$y(t) = 800\, e^{k \cdot t}$$

$$y(\cancel{1}2) = 800\, e^{2 \cdot k} \stackrel{!}{=} 700$$

$$e^{2k} = \frac{7}{8}$$

$$2k = \ln\left(\frac{7}{8}\right)$$

$$k = \frac{\ln\left(\frac{7}{8}\right)}{2} = -0{,}0668$$

$$y(12) = 800\, e^{-0{,}0668 \cdot 12} = 800\, e^{-0{,}0338\,8}$$

$$= \underline{\underline{359{,}03}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = k \cdot (100 - y) = -k \cdot y + 100k$$

$$\text{„} ky - a \text{"} \Rightarrow \begin{array}{l} a = -100k \\ k = -k \\ \frac{a}{k} = 100 \end{array}$$

$$\Rightarrow y_n = \left(y_0 - \frac{a}{k}\right)(1 + k)^n + \frac{a}{k}$$

$$= (800 - 100)(1 - k)^n + 100$$

$$= 700(1 - k)^n + 100$$

$$y_2 = 700 \underset{n=2}{\Rightarrow} 700(1-k)^2 + 100 = 700$$

$$(1-k)^2 = \frac{600}{700}$$

$$1 - k = \sqrt{\frac{6}{7}}$$

$$k = 1 - \sqrt{\frac{6}{7}} = 0{,}074$$

$$\Rightarrow y_n = 700 \, (1 - 0{,}074)^n + 100$$

$$= 700 \cdot 0{,}9258^n + 100$$

$$\Rightarrow y_{12} = \underline{\underline{377{,}60}}$$

Zu Beginn einer Grippeepidemie mit $y(0) = 10$ Infizierten infiziere jeder Bürger einer Kleinstadt täglich 3 weitere Bürger mit $R = 30.000$ Einwohnern

Wie lautet im diskreten Modell mit $\Delta t = 1$ Tag

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = k \cdot y (R - y)$$

der Wachstumsfaktor k? Wieviele werden nach 10 Tagen infiziert sein? (keine Genesung)

$$k \cdot R = 3 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{3}{30.000} = 0{,}0001$$

$$y_n = \frac{R}{\frac{R-10}{10}(1+3)^{-n} + 1} = \frac{30.000}{2999 \cdot \frac{1}{4^n} + 1}$$

$$y_{10} = \frac{30.000}{\frac{2999}{4^{10}} + 1} = 29.914$$

$$y_5 = \frac{30.000}{\frac{2999}{4^5} + 1} = 7.636 \qquad y_6 = \frac{30.000}{\frac{2999}{4^6} + 1} = 17.319$$

$$y_n = 0{,}5 \cdot 30.000 \overset{!}{=} 15.000$$

$$\frac{30.000}{\frac{2999}{4^n} + 1} = \frac{1}{2} \cdot 30.000 \quad \Rightarrow \quad n = \frac{\ln(2999)}{\ln(4)} = 5{,}775$$

$$\bar{v} = \frac{s_{ges}}{t_{ges}}$$

$$= \frac{2a}{t_1 + t_2}$$

$$= \frac{2a}{\frac{a}{50} + \frac{a}{x}} = \frac{2}{\frac{1}{50} + \frac{1}{x}}$$

$s_1 = 1$ Runde $= a$ km

$v_1 = 50$

$t_1 = \frac{a}{50}$

$s_2 = a$ km

$v_2 = x$

$t_2 = \frac{a}{x}$

$$2 = \bar{v} \cdot \left(\frac{1}{50} + \frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{2}{\bar{v}} = \frac{1}{50} + \frac{1}{x}$$

$$\frac{2}{\bar{v}} - \frac{1}{50} = \frac{1}{x} \Rightarrow \quad x = \frac{1}{\frac{2}{\bar{v}} - \frac{1}{50}}$$

a) $\bar{v} = 100 \Rightarrow x = \dfrac{1}{\frac{2}{100} - \frac{1}{50}} = \dfrac{1}{\text{„}0\text{"}} \to \infty$ ∞-schnell

b) $\bar{v} = 80 \Rightarrow x = \dfrac{1}{\frac{1}{40} - \frac{1}{50}} = \dfrac{1}{\frac{1}{200}} = \underline{\underline{200}}$