



Hochschule Aachen Klausur Mathematik I - 12. Juli 2004

SS 04 - Prof. C. Schelthoff - Punkte 100 + 26 Bonus. (D.h. 100% = 100 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel: Taschenrechner, Selbsterstellte Zusammenfassung ohne Zahlenbeispiele - Keine Bücher oder Vorlesungsmanuskripte

1	4			10	6	
2	6			11	8	
3	8			12	8	
4	8			13	8	
5	6			14	10	
6	8			15	12	
7	12			16	6	
8	10			17		
9	6			18		
68				58		

Name:

Matrikelnummer:

Studienrichtung:

1.) (4P) Gegeben sei der Zusammenhang

$$\begin{aligned}y &= r \cdot \sin \varphi \\x &= r \cdot \cos \varphi\end{aligned}$$

Berechnen Sie $\frac{dx}{dr}$, $\frac{dy}{dr}$, $\frac{dx}{d\varphi}$ und $\frac{dy}{d\varphi}$

$$\frac{dx}{dr} = \cos \varphi \quad \textcircled{1}$$

$$\frac{dy}{dr} = \sin \varphi \quad \textcircled{1}$$

$$\frac{dx}{d\varphi} = -r \sin \varphi \quad \textcircled{1}$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = r \cos \varphi \quad \textcircled{1}$$

2.) (6P) Berechnen Sie mittels Horner-Schema die Polynomdivision $\overline{f(x)} : (x - 5)$ mit Rest, wobei $f(x) = x^3 + x - 1$ ist. Welchen Funktionswert können Sie noch anhand des Horner-Schemas ablesen?

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 0 & 1 & -1 \\
 x_0=5 & \times & 5 & 25 & 130 \\
 \hline
 & 1 & 5 & 26 & 129
 \end{array}
 \quad (3)$$

$$f(5) = 129 \quad (1)$$

$$\frac{f(x)}{x-5} = x^2 + 5x + 26 + \frac{129}{x-5}$$

(2)

X

3.) (8P) Skizzieren Sie die Funktion $9x^2 - 36x + 4y^2 + 8y = 36 - 4$

$$9x^2 - 36x + 4y^2 + 8y = -4 \quad \text{Ellipse} \quad (1)$$

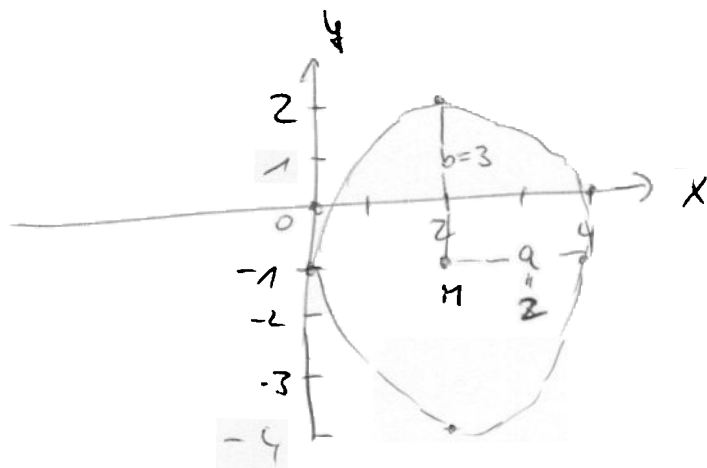
$$9(x^2 - 4x + 4 - 4) + 4(y^2 + 2y + 1 - 1) = -4$$

$$9(x-2)^2 - 36 + 4(y+1)^2 - 4 = -4$$

$$9(x-2)^2 + 4(y+1)^2 = 36$$

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1 \quad (2)$$

$$x_0 = 2 \quad y_0 = -1 \quad a = 2 \quad b = 3 \quad (3)$$



(3)

4.) (8P) Bestimmen Sie das Newton-Interpolationspolynom zu folgender Meßreihe (ohne die Meßpunkte umzusortieren)

x_i	1	-1	0
y_i	2	4	0

Wie lautet das Interpolationspolynom, wenn noch der Messwert $x=2$ mit dem Funktionswert $y=16$ hinzukommt?

Handwritten calculation of Newton coefficients:

x_i	y_i	q_0		q_1		q_2		q_3
1	2							
-1	4	$\frac{4-2}{-1-1} = -1$						
0	0	$\frac{0-4}{0-(-1)} = -4$						
2	16	$\frac{16-2}{2-0} = 8$						
				$\frac{-4+1}{0-1} = 3$				
						$\frac{4-3}{2-1} = 1$		

$$f_1(x) = q_0 + q_1(x-1) + q_2(x-1)(x+1) + q_3(x-1)(x+1) \cdot x$$

$$f_1(x) = 2 - (x-1) + 3(x-1)(x+1)$$

$$f_2(x) = 2 - (x-1) + 3(x-1)(x+1) + x \cdot (x-1)(x+1)$$

X

5.) (6P) Bestimmen Sie die Lösungen von $|2 \cdot (x - 2)| = x \cdot (x - 2)$

$$|2x - 4| = x^2 - 2x$$

$$1. \quad 2x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 4 \Leftrightarrow x \geq 2$$

$$2x - 4 = x^2 - 2x$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(x - 2)^2 = 0$$

$$\underline{\underline{x = 2}}$$

(erfüllt $x \geq 2$)

②

$$2. \quad 2x - 4 < 0 \Leftrightarrow x < 2$$

$$-2x + 4 = x^2 - 2x$$

$$x^2 = 4$$

$$\Rightarrow x = 2 \vee \underline{\underline{x = -2}}$$

③

$$\Rightarrow L = \{-2, 2\}$$

①

6) (8P) Berechnen Sie die Ableitung von $f(x) = (3x - 1)^2$ an der Stelle x_0 mit Hilfe des Differenzenquotienten

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{18x_0h + 9h^2 - 6h}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot (18x_0 + 9h - 6)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 18x_0 + 9h - 6$$

$$= 18x_0 - 6$$

$$1. \quad f(x_0 + h) = (3(x_0 + h) - 1)^2$$

$$= 9(x_0 + h)^2 - 6(x_0 + h) + 1$$

$$= \underline{9x_0^2} + 18x_0h + 9h^2 - \underline{6x_0} - 6h + \underline{1}$$

$$2. \quad f(x_0) = (3x_0 - 1)^2 \\ = \underline{9x_0^2} - \underline{6x_0} + \underline{1}$$

$$\Rightarrow f(x_0 + h) - f(x_0) = 18x_0h + 9h^2 - 6h$$

7) (12P) Differenzieren Sie:

a) $f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$ b) $f(x) = \sqrt{\sin(x)} - 1$ c) $f(x) = \ln(e^x)$

d) $f(x) = \sin(\sqrt{x})$ e) $\cos(x) \cdot e^x$ f) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$

a) $f'(x) = -\frac{1}{(\cos^2(x))} \cdot (-\sin(x)) = \frac{\sin(x)}{(\cos^2(x))}$ ②

b) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\sin(x)}} \cdot (\cos(x))$ ②

c) $f(x) = x \cdot \underbrace{\ln e}_1 \Rightarrow f'(x) = 1$ ②

d) $f'(x) = (\cos(\sqrt{x})) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ②

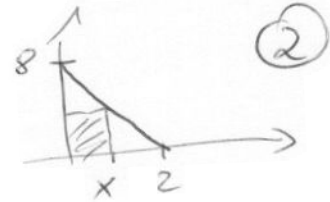
e) $f'(x) = \cos(x) \cdot e^x - \sin(x) e^x$ ②

f) $f(x) = \frac{1}{2} (0.5^x) = \frac{1}{2} e^{x \cdot \ln(0.5)}$ ②

$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} e^{x \ln(0.5)} \cdot \ln(0.5)$
 $= \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} \cdot \underbrace{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}_{=-\ln(2)}$

8) (10P) Zwischen x-Achse, y-Achse und der Funktion $f(x) = 4 \cdot (2 - x)$ soll ein Rechteck möglichst großer Fläche gelegt werden. Skizzieren Sie zunächst das Problem und lösen Sie dieses anschließend mit Hilfe der Differentialrechnung

$$F(x) = x \cdot (8 - 4x) = 8x - 4x^2 \quad (2)$$



Notwendig: $F'(x) = 0$

$$\Leftrightarrow 8 - 8x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad (2)$$

Genügend $F''(x) = -8 < 0 \Rightarrow \text{lok. Maximum} \quad (2)$

Wert $F(1) = 1 \cdot (8 - 4) = \underline{\underline{4}} \quad (2)$

9) (6P) Gegeben sei die folgende Wertetabelle

x	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,1	1,2
y	17,1	15,0	14,2	13,5	13	fehlt	15,9

Wie kann die Ableitung der unbekannten Funktion im Punkt $x_0 = 1,1$ trotz fehlenden Funktionswertes angenähert werden?

Zeichne DQ ①

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \quad \textcircled{2}$$

$$h=0,1 \quad f'(1,1) \approx \frac{f(1,2) - f(1)}{0,2} = \frac{15,9 - 13}{0,2} = \frac{2,9}{0,2} = \underline{\underline{14,5}}$$

③

10) (6P) Wie lautet das Polynom 2. Grades, welches die Funktion $f(x) = e^{x^2} - 1$ in $x_0 = 1$ bestmöglich approximiert?

$$f'(x) = 2xe^{x^2}$$

①

$$f(1) = e - 1$$

①

$$f'(1) = 2e$$

①

$$f''(x) = 2 \cdot (x \cdot 2xe^{x^2} + e^{x^2})$$

$$= 4x^2e^{x^2} + 2e^{x^2}$$

①

$$f''(1) = 6e$$

①

$$\begin{aligned} \Rightarrow f_2(x) &= f(1) + f'(1) \cdot (x-1) + \frac{f''(1)}{2} (x-1)^2 \\ &= e-1 + 2e \cdot (x-1) + 3e \cdot (x-1)^2 \end{aligned}$$

①

11) (3P +5P) Berechnen Sie den Wert $x = \sqrt[4]{10}$ als Lösung der Gleichung $x^4 = 10$ numerisch mit dem Tangentenverfahren von Newton. Starten Sie bei $x_0 = 2$ und berechnen Sie vier Iterationsschritte mit je 3 Dezimalen.

$$f(x) = x^4 - 10 \stackrel{!}{=} 0$$

$$f'(x) = 4x^3$$

(3)

i	x_i	$f(x_i) = x_i^4 - 10$	$f'(x_i) = 4x_i^3$	$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$
0	2	6	32	1,813 $(= 2 - 0,1875)$
1	1,813	0,792	23,817	1,780 $(= 1,813 - 0,033)$
2	1,780	0,039	22,559	1,778 $(= 1,780 - 0,002)$
3	1,778	0	22,494	1,778
4	1,778	0	X	X

(5)

12) (4P + 4P*) Gesucht ist die Länge der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ im Bereich von $x=1$ bis $x=2$. Stellen Sie hierzu das zu lösende Integral auf und lösen dieses numerisch mit $n=5$ Intervallen (3 Dezimale).

$$L_1^2\left(\frac{1}{x}\right) = \int_1^2 \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{x^2}\right)^2} dx = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx$$

②

$$n=5 \Rightarrow h = \frac{2-1}{5} = 0,2$$

1
1,2
1,4
1,6
1,8
2

~~0~~ 1,414
~~0,553~~ 1,217
~~0,7~~ 1,123
~~0,781~~ 1,074
~~0,834~~ 1,047
~~0,866~~ 1,031

$$I \approx 0,2 \cdot \left(\frac{0+0,866}{2} + 0,553 + 0,7 + 0,781 + 0,831 \right)$$

$$= 0,2 \cdot (0,433 + 2,865)$$

$$= 0,2 \cdot 3,298 = \underline{\underline{0,660}}$$

②

④

$$I = 0,2 \cdot \left(\frac{1,414 + 1,031}{2} + 1,217 + 1,123 + 1,074 + 1,047 \right)$$

$$= 0,2 \cdot (1,222 + 4,460)$$

$$= 0,2 \cdot 5,683 = 1,137$$

13) (8 P*)(4P + 4P)

a) Wie groß muß der Parameter α gewählt werden, damit das Volumen des Spates der drei Vektoren

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \text{und} \quad \vec{F}_3 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

gerade 10 Volumeneinheiten ergibt?

b) Wie groß ist der Abstand der Ebenen

$$E_1: \quad x + y + z = 6$$

$$E_2: \quad 2x - y + z = 7$$

a)

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \alpha & | & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & | & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 6 & | & -1 & 0 \end{vmatrix} = 6 - 8 + \alpha - 12 = -14 + \alpha \stackrel{!}{=} 10$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 24}}$$

(4)

b) Vorst.: parallel, also $\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{d = 0}}$$

(4)

14) (10P) Auf dem Einheitskreis bewege sich ein Punkt mit $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$

Weiterhin ist ein ortsabhängiges Kraftfeld gegeben mit

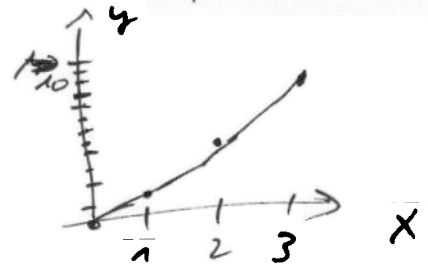
$$\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + y \\ \frac{y}{x} \end{pmatrix}$$

a) (2P) Skizzieren Sie den Weg von $t = 0$ bis $t = 3$.

b) (8P*) Welche Arbeit wird verrichtet, wenn der Massenpunkt durch dieses Kraftfeld bewegt wird?

a) $t=0: \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $t=1:$
 (2)

$t=2: \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $t=3: \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$



b) $\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}$

$F(\vec{x}(t)) = \begin{pmatrix} t^2 + t^2 \\ \frac{t^2}{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t^2 \\ t \end{pmatrix}$ (2)

$\Rightarrow W = \int_{t=0}^3 \begin{pmatrix} 2t^2 \\ t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} dt = \int_{t=0}^3 2t^2 + 2t^2 dt$

$= 4 \frac{t^3}{3} \Big|_{t=0}^3 = 4 \cdot 9 = 36$

(4)

15) (6P+6*P) Berechnen Sie die folgenden Integrale

a) $\int \sin(x) \cos(x) dx$ b) $\int \ln\left(\frac{1}{x}\right) dx$ c*) $\int \frac{x^4 - x^3 + 8x^2 - 3x - 2}{x^2 \cdot (x-1)} dx$

a) ③ $\int \sin(x) \cos(x) dx = \int z dz = \frac{z^2}{2} + C$
 $z = \sin(x)$
 $dz = \cos(x) dx$
 $= \frac{\sin^2(x)}{2} + C$

b) ③ $\int \ln\left(\frac{1}{x}\right) dx = - \int \ln(x) dx = - (x \ln(x) - x) + C$
 $= x - \underbrace{x \ln(x)}_{\text{oder: } + x \ln\left(\frac{1}{x}\right)} + C$

$$c) \begin{array}{r} x^4 - x^3 + 8x^2 - 3x - 2 : x^3 - x^2 = x + \frac{8x^2 - 3x - 2}{x^2 \cdot (x-1)} \\ - (x^4 - x^3) \\ \hline 0 \end{array} \quad (1)$$

$$\frac{8x^2 - 3x - 2}{x^2 \cdot (x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} \quad (1)$$

$$8x^2 - 3x - 2 = A \cdot x \cdot (x-1) + B(x-1) + Cx^2$$

$$x=0 \quad -2 = -B \Rightarrow B=2$$

$$x=1 \quad 8-3-2 = C \Rightarrow C=3$$

$$x=-1 \quad 8+3-2 = 2A-4+3 \Rightarrow 9=2A-1 \Rightarrow A=5 \quad (2)$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^4 - x^3 + 8x^2 - 3x - 2}{x^2 \cdot (x-1)} dx = \int x dx + \int \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x-1} dx \quad (1)$$

$$= \frac{x^2}{2} + 5 \cdot \ln|x| - \frac{2}{x} + 3 \cdot \ln|x-1| + C \quad (1)$$

16) (6P) Berechnen Sie den Grenzwert von $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \cdot e^x}{\ln(x)}$

Viel Erfolg!

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)e^x}{\ln(x)} \xrightarrow{0/0} \underset{\text{L'Hosp.}}{\lim_{x \rightarrow 1}} \frac{e^x + (x-1)e^x}{\frac{1}{x}} = \frac{e}{1} = e$$

⑥