



Hochschule Aachen Probeklausur Mathematik I für Chemiker und Biologen

Zugelassene Hilfsmittel: Taschenrechner, Selbsterstellte Zusammenfassung -
Keine Bücher oder Vorlesungsmanuskripte

1. Wir betrachten die Funktion $f(x) = x \cdot \cos(-x)$

- Wie lautet die Ableitung dieser Funktion?
- Wie lautet die Stammfunktion dieser Funktion? Wie lautet das Integral der Funktion über den Bereich von -1 bis 1?
- Berechnen Sie in $x_0 = 0$ die Taylorentwicklung dieser Funktion bis zum quadratischen Term. Wie lautet die (unendliche) Taylorreihe?
- Berechnen Sie die Länge der Funktion auf dem Abschnitt von $a = -1$ bis $b = 1$. Lösen Sie das auftretende Integral näherungsweise mit $n=5$ Intervallen.
- Wo wird die Funktion den Wert 0 ausser im Ursprung annehmen? Lösen Sie das auftretende Nullstellenproblem mit dem Startwert $x_0 = 3$ und rechnen Sie mit 3 Dezimalen 3 Iterationsschritte aus.

2. Gegeben sei eine Geschwindigkeitsfunktion

$$v(t) = v_0 \cdot \frac{1}{t^2 + 1}$$

Wie lauten Wegfunktion und Beschleunigungsfunktion ?

3. Sie bewegen sich auf einem Weg

$$X(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ \frac{1}{t} \end{pmatrix}$$

im Zeitraum $t=1$ bis $t=3$. Dort ist ein Kraftfeld gegeben mit

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} y + 1 \\ x - 2 \end{pmatrix}$$

Erstellen Sie eine Skizze des Weges und berechnen Sie die Arbeit, die entlang des Weges geleistet wird. Existiert ein Potential? Wenn ja, welches und berechnen Sie hiermit ebenfalls die Arbeit.

4. Ein Handy verliere monatlich 1% seines Wertes. Wann ist ein Handy mit dem Neupreis von 200 € auf einen Restwert von 100€ gesunken? Stellen Sie zunächst ein Modell des diskreten ungebremsten Wachstums auf und geben Sie die Prozessgleichung an.

5. Sie tilgen einen Kredit mit monatlichem Zins von 0,2% von anfänglich 10000 € mit monatlich 200 €. Geben Sie die Prozessgleichung an und berechnen Sie wann der Kredit getilgt ist.

$$1) \quad f(x) = x \cdot \cos(-x) \\ = x \cdot \cos(x)$$

$$a) \quad f'(x) = \cos(x) - x \sin(x) \quad \text{Produktregel}$$

$$b) \quad \int \underset{u}{x} \underset{v'}{\cos(x)} dx = x \sin(x) - \int \sin(x) dx \quad \text{Part. Integr.} \\ = x \sin(x) + \cos(x) + C$$

$$\begin{aligned} u' &= 1 & v &= \sin(x) \\ \int_{-1}^1 x \cos(x) &= \left. x \sin(x) + \cos(x) \right|_{-1}^1 \\ &= \sin(1) + \cos(1) - \left(\underbrace{-\sin(-1)}_{-\sin(1)} + \underbrace{\cos(-1)}_{\cos(1)} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$c) \quad f(x) = x \cos(x) \quad f(0) = 0$$

$$f'(x) = \cos(x) - x \sin(x) \quad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\sin(x) - (x \cos(x) + \sin(x)) \quad f''(0) = 0$$

$$\Rightarrow \quad f_2(x) = 0 + 1(x-0) + \frac{0}{2}(x-0)^2 = \underline{\underline{x}}$$

$$\begin{aligned} \text{Taylor} \quad x \cos(x) &= x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} (-1)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n+1} \end{aligned}$$

$$d) \int_{-1}^1 x \cos(x) = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + (\cos(x) - x \sin(x))^2} dx$$

$$u=5 \Rightarrow \frac{b-a}{n} = h = \frac{2}{5} = 0,4$$

i	x_i	$f(x_i)$
0	-1	1,044
1	-0,6	1,112
2	-0,2	1,373
3	0,2	1,373
4	0,6	1,112
5	1	1,044

$\sum \approx 4,98 \Rightarrow I \approx 0,4 \cdot \left(\frac{2 \cdot 1,044}{2} + 4,98 \right) = 2,41$

e) $x \cos(x) = 0$
 $f(x)$

$$f'(x) = \cos(x) - x \sin(x)$$

i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$
0	3	-2,95	-1,413
1	0,899	0,56	-0,08
2	7,852	0,014	-7,85
3	7,853	0	-7,854

$$2. \quad v(t) = v_0 \frac{1}{t^2+1}$$

$$Q(t) = v'(t) = v_0 \frac{-2t}{(t^2+1)^2}$$

$$S(t) = \int v_0 \frac{1}{t^2+1} dt = v_0 \arctan(t) + C$$

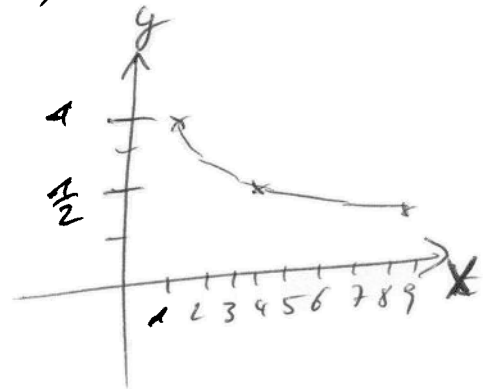
3.

$$X(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 1/t \end{pmatrix} \quad X'(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ -1/t^2 \end{pmatrix}$$

$$t=1 \quad X(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$t=2 \quad X(2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$t=3 \quad X(3) = \begin{pmatrix} 9 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$



$$F(x, y) = \begin{pmatrix} y+1 \\ x-2 \end{pmatrix} \Rightarrow F(X(t)) = F(x=t^2, y=1/t) = \begin{pmatrix} 1/t+1 \\ t^2-2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow W = \int_1^3 \underbrace{\begin{pmatrix} 1/t+1 \\ t^2-2 \end{pmatrix}}_{F(X(t))} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2t \\ -1/t^2 \end{pmatrix}}_{X'(t)} dt = \int_1^3 2 + 2t - 1 + \frac{2}{t^2} dt$$

$$= \int_1^3 2t + 1 + \frac{2}{t^2} dt = \left[t^2 + t - \frac{2}{t} \right]_1^3 = 9 + 3 - \frac{2}{3} - (1 + 1 - 2) = \frac{34}{3}$$

Potential $V(x, y)$

$$\underbrace{V(x)}_{V(x)} \quad \frac{dV}{dx} = y+1 \quad \Rightarrow \quad \underset{V(x,y)}{V(x)} = \int y+1 dx = xy + x + C_1(y)$$
$$\frac{dV}{dy} = x-2 \quad \Rightarrow \quad \underset{V(x,y)}{V(y)} = \int x-2 dy = xy - 2y + C_2(x)$$

$$\Rightarrow C_2(x) = x, \quad C_1(y) = -2y$$

$$V(x, y) = \underline{\underline{xy - 2y + x}}$$

$$\Rightarrow V(A) = V(x=1, y=1) = 1 \cdot 1 - 2 + 1 = 0$$

$$V(E) = V(x=9, y=\frac{1}{3}) = 9 \cdot \frac{1}{3} - \frac{2}{3} + 9 = 12 - \frac{2}{3} = \frac{34}{3}$$

$$\Rightarrow W = V(E) - V(A) = \frac{34}{3} \quad \checkmark$$

$$4. \quad \Delta y = -0,01 \cdot y_{u-1}, \quad y_0 = 100 \quad k = -0,01$$

$\Delta t = 1 \text{ Mon.}$

$$\Rightarrow y_u = y_0^{200} (1 - 0,01)^u = \underline{\underline{200 \cdot 0,99^u}}$$

$$y_u = 100 \Rightarrow 200 \cdot 0,99^u = 100$$

$$0,99^u = \frac{1}{2}$$

$$u = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{\ln(0,99)} = \frac{-\ln(2)}{\ln(0,99)} = 68,96 \text{ Mon.}$$

$$5. \quad \Delta t = 1 \text{ Monat}$$

$$y_0 = 10.000$$

$$k = 0,002$$

$$q = 200$$

$$\left\{ \frac{q}{k} = 100.000 \right.$$

Störung erster
Ordnung

$$\Delta y = 0,002 \cdot y_{u-1} - 200$$

$$y_u = \left(y_0 - \frac{q}{k} \right) (1+k)^u + \frac{q}{k} = -90.000 \cdot 1,002^u + \underline{\underline{100.000}}$$

$$y_u = 0 \Rightarrow 100.000 = 90.000 \cdot 1,002^u$$

$$\frac{100}{90} = 1,002^u$$

$$\ln\left(\frac{10}{9}\right) = u \cdot \ln(1,002)$$

$$u = \frac{\ln(\frac{10}{9})}{\ln(1,002)} = \frac{0,105}{0,001998} = 52,73$$

Monate