Probeklausur 2011

1.) (4P) Bestimmen Sie die Lösungen von

$$|4-x| = 3x$$

2.) (3P) Berechnen Sie mittels Horner-Schema die Polynomdivision $f(x):(x+1)$ mit Rest, wobei $f(x) = -x^3+x-5$ ist. Welchen Funktionswert können Sie noch anhand des Horner-Schemas ablesen?

3.) (5P) Skizzieren Sie die Funktion $9x^2 + 24y - 36x + 4y^2 + 36 = 0$

4.) (4P) Bestimmen Sie das Newton-Interpolationspolynom zu folgender Meßreihe (ohne die Meßpunkte umzusortieren)

x_i	1	-1	0
y_i	2	4	0

Wie lautet das Interpolationspolynom, wenn noch der Messwert x=2 mit dem Funktionswert y=16 hinzukommt?

5.) (3P) Ein verzögerter Wachstumsprozess werde beschrieben gemäß

$$\begin{aligned} y_n &= 1,2 \cdot y_{n-1} + 0,64 \cdot y_{n-2} \\ y_0 &= 0, \quad y_1 = 2 \end{aligned}$$

Berechnen Sie eine explizite Prozessgleichung für y_n.Wie lautet der asymptotische Wachstumsfaktor? (D.h. welcher Summand der Prozessgleichung wird für grosse n die Population beschreiben und was wäre dies für ein Wachstumsfaktor im ungebremsten Wachstum)

6) (5P) Wie lautet das Polynom 2. Grades, welches die Funktion $f(x) = \ln(x^2+1) + x + 1$
in $x_0 = 0$ bestmöglich approximiert?

7) (3P) Differenzieren Sie:

a) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ b) $f(x) = \cos(\ln(x))$ c) $f(x) = \sqrt{ax^2-1}$

8) (4P) Wo hat die Funktion $f(x) = x^3 - 3x + 1$ lokale Extrema?

9) (4P) Wie lautet die Projektion des Vektors $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ auf den Vektor $\overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$? Wie gross ist der Winkel zwischen den Vektoren?

10) (5P) Sie zahlen am Ende eines jeden Jahres 1000€ auf einen (zu Beginn leeren) Bausparvertrag ein, der mit 4% jährlich (diskret) verzinst wird. Wie lauten Modell und Prozessgleichung? Der Vertrag wird zugeteilt, wenn Sie 50.000€ angespart haben. Wann ist dies der Fall ?

11) (4P) Zeichnen Sie die komplexen Zahlen $z_1 = -1 - 3i$ und $z_2 = 2 + 2i$ in ein Koordinatensystem und berechnen Sie anschliessend $z_3 = z_1 + z_2$ und $z_4 = z_1 \cdot z_2$ in kartesischen Koordinaten. Wie lauten die beiden ursprünglichen Zahlen in Polarkoordinaten? (atan(3)=71,565^0)

12) (4P) Gesucht ist das Rotationsvolumen welches entsteht, wenn die Funktion $\frac{1}{x}$ im Intervall von $x = 1$ bis $x = 2$ um die x-Achse rotiert wird.Stellen Sie hierzu das zu lösende Integral auf und lösen dieses.

13) (4P)

Auf welche Arten muß der Parameter α gewählt werden, damit die folgenden drei Vektoren in einer Ebene liegen

$$\overrightarrow{F_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad \overrightarrow{F_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \text{und} \quad \overrightarrow{F_3} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ \alpha^2 \end{pmatrix}$$

14) (5P) Es bewege sich ein Punkt mit $\overrightarrow{X}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t-1 \end{pmatrix}$. Weiterhin ist ein ortsabhängiges Kraftfeld gegeben mit $\overrightarrow{F}(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x - y^2 \end{pmatrix}$.

a) Skizzieren Sie den Weg von $t = 0$ bis $t = 3$.

b) Welche Arbeit wird verrichtet, wenn der Massenpunkt durch dieses Kraftfeld bewegt wird?

15) (4P) Berechnen Sie die folgenden Integrale

a) $\displaystyle\int_{x=1}^{2} \sin(x-1) \cdot x dx$ b) $\int x^5 \cdot \ln(x^2) dx$

16) (3P) Berechnen Sie den Grenzwert von

$$lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\cos(x) - 1}$$

Probeklausur 2011- Lösungen

1.) (4P) Bestimmen Sie die Lösungen von

$$|4-x| = 3x$$

Lösung:

1. Fall

$$\begin{aligned} 4-x &\geq 0 \\ x &\leq 4 \end{aligned}$$

Dann ist $|4-x| = 4-x$

$$\begin{aligned} 4-x &= 3x \\ 4 &= 4x \\ x &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_1 &= \{1\} \cap (-\infty, 4] \\ &= \{1\} \end{aligned}$$

2. Fall

$$\begin{aligned} 4-x &< 0 \\ x &> 4 \end{aligned}$$

Dann ist $|4-x| = -(4-x) = x-4$

$$\begin{aligned} x-4 &= 3x \\ -2x &= 4 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_2 &= \{-2\} \cap (4, \infty] \\ &= \{\} \end{aligned}$$

Insgesamt

$$L = L_1 \cup L_2 = \{1\}$$

2.) (3P) Berechnen Sie mittels Horner-Schema die Polynomdivision $f(x) : (x+1)$ mit Rest, wobei $f(x) = -x^3+x-5$ ist. Welchen Funktionswert können Sie noch anhand des Horner-Schemas ablesen?

Lösung: $x_0 = -1$

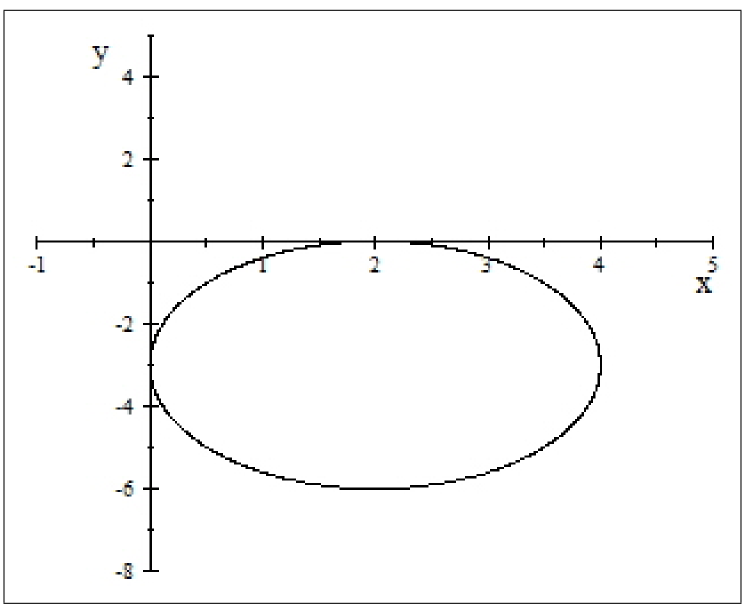
	-1	0	1	-5
$x_0 = -1$	x	1	-1	0
	-1	1	0	-5

$$\begin{aligned} f(-1) &= -5 \\ \frac{f(x)}{x+1} &= -x^2 + x + \frac{-5}{x+1} \end{aligned}$$

3.) (5P) Skizzieren Sie die Funktion $9x^2 + 24y - 36x + 4y^2 + 36 = 0$
Lösung:

A=9, B=4 $\rightarrow$ *Ellipse*

$$\begin{aligned} 9x^2 + 24y - 36x + 4y^2 + 36 &= 0 \\ 9(x^2 - 4x + 4) + 4(y^2 + 6y + 9) &= -36 + 36 + 36 \\ 9(x-2)^2 + 4(y+3)^2 &= 36 \\ \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+3)^2}{9} &= 1 \\ x_0 &= 2, a = 2 \\ y_0 &= -3, b = 3 \end{aligned}$$



4.) (4P) Bestimmen Sie das Newton-Interpolationspolynom zu folgender Meßreihe (ohne die Meßpunkte umzusortieren)

x_i	1	-1	0
y_i	2	4	0

Wie lautet das Interpolationspolynom, wenn noch der Messwert x=2 mit dem Funktionswert y=16 hinzukommt?

Lösung:

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 2 = a_0 & \frac{4-2}{-1-1} = -1 = a_1 & \frac{-4+1}{0-1} = 3 = a_2 & \frac{4-3}{2-1} = 1 = a_3 \\
-1 & 4 & \frac{0-4}{0+1} = -4 & \frac{8+4}{3} = 4 & \\
0 & 0 & \frac{16-0}{2-0} = 8 & & \\
2 & 16 & & &
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
p_1(x) &= 2 + (-1) \cdot (x-1) + 3(x-1)(x+1) \\
p_2(x) &= 2 + (-1) \cdot (x-1) + 3(x-1)(x+1) + (x-1)(x+1)x
\end{aligned}$$

5.) (3P) Ein verzögerter Wachstumsprozess werde beschrieben gemäß

$$\begin{aligned}
y_n &= 1,2 \cdot y_{n-1} + 0,64 \cdot y_{n-2} \\
y_0 &= 0, \quad y_1 = 2
\end{aligned}$$

Berechnen Sie eine explizite Prozessgleichung für y_n.Wie lautet der asymptotische Wachstumsfaktor? (D.h. welcher Summand der Prozessgleichung wird für grosse n die Population beschreiben und was wäre dies für ein Wachstumsfaktor im ungebremsten Wachstum)

Lösung:
Ansatz

$$\begin{aligned}
y_n &= q^n \\
q^n &= 1,2 \cdot q^{n-1} + 0,64 \cdot q^{n-2} \\
q^2 - 1,2q - 0,64 &= 0 \\
q_{1,2} &= 0,6 \pm \sqrt{0,36 + 0,64} \\
q_1 &= -0,4 \\
q_2 &= 1,6
\end{aligned}$$

$$y_n = a \cdot 1,6^n + b \cdot (-0,4)^n$$

Startwerte:

$$\begin{aligned} 0 &= a+b \rightarrow a=-b \\ 2 &= 1,6a-0,4b \\ 2 &= 2a \\ a &= 1, b=-1 \end{aligned}$$

Prozessgleichung

$$y_n = 1,6^n - (-0,4)^n$$

Asymptotisch

$$y_n \approx 1,6^n$$

d.h. 60% Zuwachs bzw. k=0,6

6) (5P) Wie lautet das Polynom 2. Grades, welches die Funktion $f(x) = \ln(x^2+1)+x+1$
in $x_0 = 0$ bestmöglich approximiert?

Lösung:

$$\begin{array}{cc} f(x) = \ln(x^2+1)+x+1 & f(0)=1 \\ f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}+1 & f'(0)=1 \\ f''(x) = \frac{(x^2+1)\cdot 2-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} & f''(0)=2 \end{array}$$

$$f_2(x) = 1+x+\frac{2}{2}x^2 = 1+x+x^2$$

7) (3P) Differenzieren Sie:

a) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ b) $f(x) = \cos(\ln(x))$

c) $f(x) = \sqrt{ax^2-1}$

Lösung:

a) Quotientenregel

$$f'(x) = \frac{x\cdot\frac{1}{x}-\ln(x)}{x^2} = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$$

b) Kettenregel

$$f'(x) = -\sin(\ln(x))\cdot\frac{1}{x}$$

c) Kettenregel

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2ax\frac{1}{2\sqrt{ax^2-1}} \\ &= \frac{ax}{\sqrt{ax^2-1}} \end{aligned}$$

8) (4P) Wo hat die Funktion $f(x) = x^3 - 3x + 1$ lokale Extrema?

Lösung:
1. Kandidaten:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 3 = 0 \\ x^2 &= 1 \\ x &= 1 \vee x = -1 \end{aligned}$$

2. Hinreichende Bedingung

$$f''(x) = 6x$$

a) $x = 1$

$$\begin{aligned} f''(1) &= 6 > 0 \\ & \quad \text{lokales Minimum} \\ f(1) &= 1 - 3 + 1 = -1 \end{aligned}$$

b) $x = -1$

$$\begin{aligned} f''(-1) &= -6 < 0 \\ & \quad \text{lokales Maximum} \\ f(-1) &= -1 + 3 + 1 = 3 \end{aligned}$$

9) (4P) Wie lautet die Projektion des Vektors $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ auf den Vektor $\overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$? Wie gross ist der Winkel zwischen den Vektoren?

Lösung:

$$\overrightarrow{x_y} = \frac{\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}}{||\overrightarrow{y}||^2} \cdot \overrightarrow{y}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{y} &= 3+4+2=9\\ ||\overrightarrow{y}||^2 &= 9+16+1=26\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{x_y} = \frac{\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{y}}{||\overrightarrow{y}||^2}\cdot\overrightarrow{y} = \frac{9}{26}\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{y} &= ||\overrightarrow{x}||\cdot||\overrightarrow{y}||\cdot\cos\varphi\\ \varphi &= \arccos(\frac{\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{y}}{||\overrightarrow{x}||\cdot||\overrightarrow{y}||})\\ &= \arccos(\frac{9}{\sqrt{6\cdot 26}})\end{aligned}$$

10) (5P) Sie zahlen am Ende eines jeden Jahres 1000€ auf einen (zu Beginn leeren) Bausparvertrag ein, der mit 4% jährlich (diskret) verzinst wird. Wie lauten Modell und Prozessgleichung? Der Vertrag wird zugeteilt, wenn Sie 50.000€ angespart haben. Wann ist dies der Fall ?

Lösung:

$$\begin{aligned}y_0 &= 0\\ \triangle y &= 0,04\cdot y+1000\end{aligned}$$

Störung erster Ordnung, $k=0,04, a=-1000$
Prozessgleichung:

$$\begin{aligned}y_n &= \left(0-\frac{-1000}{0,04}\right)1,04^n+\frac{-1000}{0,04}\\ &= 25000\cdot 1,04^n-25000\\ &= 25000\cdot(1,04^n-1)\end{aligned}$$

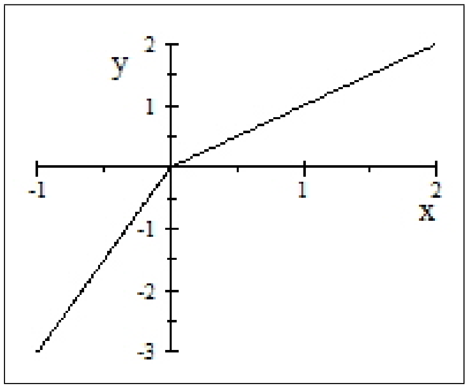
$$\begin{aligned}50000 &= 25000\cdot(1,04^n-1)\\ 1,04^n-1 &= 2\\ 1,04^n &= 3\\ n &= \frac{\ln(3)}{\ln(1.04)}\ (=28,011\text{ Jahre})\end{aligned}$$

11) (4P) Zeichnen Sie die komplexen Zahlen $z_1=-1-3i$ und $z_2=2+2i$ in ein

Koordinatensystem und berechnen Sie anschliessend $z_3=z_1+z_2$ und $z_4=z_1\cdot z_2$

in kartesischen Koordinaten. Wie lauten die beiden ursprünglichen Zahlen in Polarkoordinaten? (atan(3)=71,565^0)

Lösung:



$$
\begin{aligned}
z_3 &= z_1 + z_2 \\
&= (-1-3i) + (2+2i) \\
&= 1-i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z_3 &= z_1 \cdot z_2 \\
&= (-1-3i) \cdot (2+2i) \\
&= 4-8i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z_1 &: r = \sqrt{1+9} = \sqrt{10} \\
\varphi &= a\tan(\frac{3}{1}) = 71,565^0 + 180^0 \\
&= 251,565^0 \\
z_1 &= \sqrt{10} \cdot e^{i \cdot 251,565^0}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z_2 &: r = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} \\
\varphi &= a\tan(\frac{2}{2}) = 45^0 \\
z_1 &= \sqrt{8} \cdot e^{i \cdot 45^0}
\end{aligned}
$$

12) (4P) Gesucht ist das Rotationsvolumen welches entsteht, wenn die Funktion $\frac{1}{x}$ im Intervall von $x = 1$ bis $x = 2$ um die x-Achse rotiert wird.Stellen Sie hierzu das zu lösende Integral auf und lösen dieses.

Lösung:

$$\int_1^2 \pi \frac{1}{x^2} dx = \left[\pi \cdot \left(\frac{-1}{x}\right)\right]_1^2 = -\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2}$$

13) (4P)
Auf welche Arten muß der Parameter α gewählt werden, damit die folgenden drei Vektoren in einer Ebene liegen

$$\overrightarrow{F_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad \overrightarrow{F_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \text{und } \overrightarrow{F_3} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ \alpha^2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\left[\overrightarrow{F_1}\ \overrightarrow{F_2}\ \overrightarrow{F_3}\right] := \underbrace{\overrightarrow{F_1}\ \cdot\ (\underbrace{\overrightarrow{F_2}\ \times \overrightarrow{F_3}}_{Vektorprodukt})}_{Skalarprodukt}$$

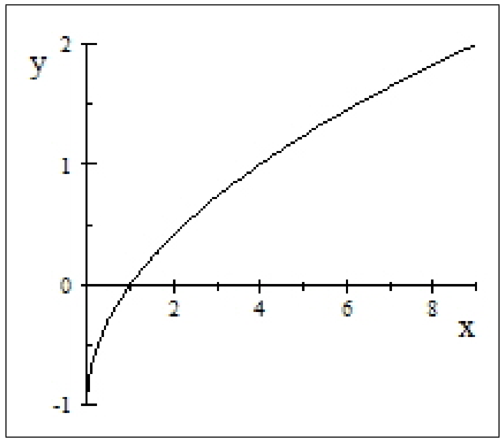
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{F_2} \times \overrightarrow{F_3} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ \alpha^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 \\ -2\alpha^2 \\ 2-\alpha \end{pmatrix} \\
\overrightarrow{F_1} \cdot \begin{pmatrix} \alpha^2 \\ -2\alpha^2 \\ 2-\alpha \end{pmatrix} &= \alpha^2 - 2\alpha^2 + 2 \cdot (2-\alpha) \\
&= -\alpha^2 - 2\alpha + 4 = 0 \\
\alpha^2 + 2\alpha - 4 &= 0 \\
\alpha_{1,2} &= -1 \pm \sqrt{1+4} \\
&= -1 \pm \sqrt{5}
\end{aligned}$$

14) (5P) Es bewege sich ein Punkt mit $\overrightarrow{X}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t-1 \end{pmatrix}$. Weiterhin ist ein ortsabhängiges Kraftfeld gegeben mit $\overrightarrow{F}(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x-y^2 \end{pmatrix}$.

a) Skizzieren Sie den Weg von $t=0$ bis $t=3$.

b) Welche Arbeit wird verrichtet, wenn der Massenpunkt durch dieses Kraftfeld bewegt wird?

Lösung:



$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{X}'(t) &= \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix} \\
F(\overrightarrow{X}(t)) &= F(x = t^2, y = t-1) \\
&= \begin{pmatrix} t-1 \\ t^2 - (t-1)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-1 \\ t^2 - t^2 + 2t - 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} t-1 \\ 2t-1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
W &= \int_{t=0}^{3} \begin{pmatrix} t-1 \\ 2t-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix} dt \\
&= \int_{t=0}^{3} 2t^2 - 2t + 2t - 1 dt \\
&= \int_{t=0}^{3} 2t^2 - 1 dt \\
&= \left[\frac{2}{3} t^3 - t \right]_{t=0}^{3} = 18 - 3 = 15
\end{aligned}
$$

15) (4P) Berechnen Sie die folgenden Integrale

a) $\int\limits_{x=1}^{2} \sin(x-1) \cdot x dx$ b) $\int x^5 \cdot \ln(x^2) dx$

Lösung:

a) Partielle Integration

$$\int\limits_{x=1}^{2} \underbrace{\sin(x-1)}_{v'(x)} \cdot \underbrace{x}_{u(x)} dx = [-\cos(x-1)\cdot x]_{x=1}^{2} + \int_{x=1}^{2} \cos(x-1)dx$$
$$= -2\cos(1) + 1 + \sin(1)$$

b) Partielle Integration

$$\int^{2} \underbrace{x^5}_{v'(x)} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{u(x)} dx = \frac{1}{3}\cdot x^6 \ln(x) - \int \frac{1}{3}\cdot x^6 \cdot \frac{1}{x} dx$$
$$= \frac{1}{3}\cdot x^6 \ln(x) - \int \frac{1}{3}\cdot x^5 dx$$
$$= \frac{1}{3}\cdot x^6 \ln(x) - \frac{1}{18}\cdot x^6 + c$$

16) (3P) Berechnen Sie den Grenzwert von

$$lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\cos(x)-1}$$

Lösung:
De L'Hospital

$$lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\cos(x)-1} = lim_{x\to 0} \frac{2x}{-\sin(x)}$$
$$= lim_{x\to 0} \frac{2}{-\cos(x)}$$
$$= -2$$