1.) (3P) Eine Wegfunktion eines Körpers sei gegeben durch

$$s(t) = \frac{g}{2}t^2 + \alpha \sin(wt)$$

Welche Bedeutung haben die ersten beiden Ableitungen und wie lauten diese?

Wie lautet die Ableitung

$$\frac{ds}{dw}$$

2.) (3P) Berechnen Sie mittels Horner-Schema das Ergebnis der Polynomdivision $x^3 - x + 1 : (x + 2)$

3.) (5P) Skizzieren Sie die Funktion $x^2 + 2x + 13 + 4y^2 - 16y = 0$

4) (5P) Bestimmen Sie das Newton-Interpolationspolynom zu folgender Meßreihe

x_i	1	0	-1
y_i	2	-1	-6

Wie lautet das Interpolationspolynom, wenn noch der Messpunkt x=2 mit dem Funktionswert y=9 hinzukommt?

5.) (5P) Bestimmen Sie die Lösungsmenge von

$$\frac{3}{x-2} > x - 4$$

6) (6P) Differenzieren Sie:
a) $f(x) = ax^2 - bx\ln(x) + 1$ b) $f(x) = \sin(\ln(x))$ c) $f(x) = \frac{\ln(x)}{\sin(x)}$

7) (6P) Zwischen positiver x-Achse, positiver y-Achse und der Funktion $f(x) = 9 - x^2$ soll ein Rechteck möglichst großer Fläche gelegt werden. Skizzieren Sie zunächst das Problem und lösen Sie dieses anschließend mit Hilfe der Differentialrechnung

8) (3P)
Wie groß muß der Parameter α gewählt werden, damit das Volumen des Spates der drei Vektoren

$$\overrightarrow{F_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \qquad \overrightarrow{F_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \text{und} \quad \overrightarrow{F_3} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

gerade 10 Volumeneinheiten ergibt?

9) (4P) Eine Tierpopulation vermehre sich täglich um 10 Prozent. Weiterhin werden täglich 80 Tiere für einen Versuch entnommen. Wie lautet die Prozessgleichung bei einem Startwert von 700 Tieren? Wird die Population aussterben? Wenn ja, wann ?

10) (4P) Wie lautet das Polynom 2. Grades, welches die Funktion

$$f(x) = e^{x+1} + x + 2$$

in $x_0 = -1$ bestmöglich approximiert?

11) (5P) Berechnen Sie zu den komplexen Zahlen $z_1 = 1 - i$ und $z_2 = 6 + 8i$ die Werte

$$\begin{aligned} z_3 &= z_1 \cdot z_2, z_4 = \frac{z_1}{z_2} \\ z_5 &= z_1 + z_2, z_6 = z_2 - z_1 \end{aligned}$$

und zeichnen Sie die Zahlen z_1 und z_2 in ein Koordinatensystem.

12) (5P) Wie groß ist das Rotationsvolumen, wenn eine Gerade

$$y = f(x) = m \cdot x + n$$

im Bereich von $x = 0$ bis $x = 1$ um die x-Achse rotiert wird?

13) Es bewege sich ein Massenpunkt mit $\overrightarrow{x(t)} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$. Weiterhin ist ein ortsabhängiges Kraftfeld gegeben mit $\overrightarrow{F(x,y)} = \begin{pmatrix} x^2 - y + 1 \\ x \cdot y \end{pmatrix}$.

a) (1P) Skizzieren Sie den Weg von $t = 0$ bis $t = 2$.

b) (5P) Welche Arbeit wird verrichtet, wenn der Massenpunkt durch dieses Kraftfeld bewegt wird?

14) (6P) Berechnen Sie die folgenden Integrale

a) $\int x \cdot e^{-x} dx$ b) $\int_0^{\pi^2} \frac{\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} dx$

15) (4P) Berechnen Sie den Grenzwert von $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - x - 1}{\cos(x) - 1}$

16) (3P) Wir betrachten die Reaktionsgleichung eines Stoffes mit der unbekannten Konzentration $y(t)$ und wissen für die Konzentrationsänderung gilt:

$$\frac{\triangle y}{\triangle t} = -0,03 \cdot y(t)$$

Wie lautet die kontiunierliche Prozessgleichung für eine Startkonzentration $y(0) = 0,5$?Wann ist die Konzentration auf $0,1$ gesunken?

Lösungen:

1.) (3P) Eine Wegfunktion eines Körpers sei gegeben durch

$$s(t) = \frac{g}{2}t^2 + \alpha \sin(wt)$$

Welche Bedeutung haben die ersten beiden Ableitungen und wie lauten diese?

Wie lautet die Ableitung

$$\frac{ds}{dw}$$

Lösung:

Geschwindigkeit

$$v(t) = s'(t) = gt + \alpha w \cos(wt)$$

Beschleunigung

$$a(t) = s''(t) = g - \alpha w^2 \sin(wt)$$

$$\frac{ds}{dw} = \alpha t \cos(wt)$$

2.) (3P) Berechnen Sie mittels Horner-Schema das Ergebnis der Polynomdivision $x^3 - x + 1 : (x + 2)$

Lösung:

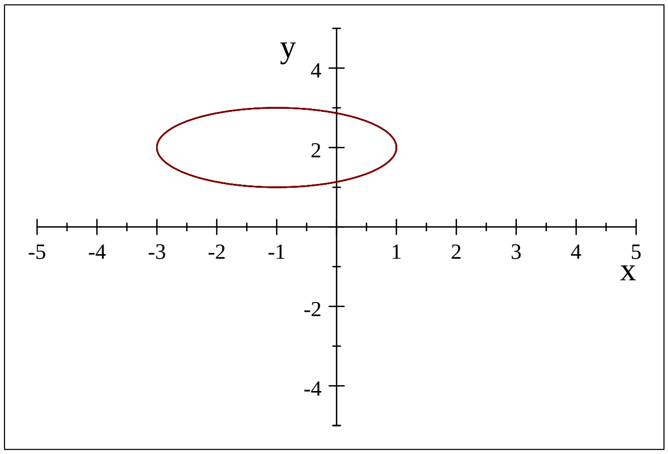
$$\begin{array}{cccccc} & 1 & 0 & -1 & 1 \\ x_0 = -2 & x & -2 & 4 & -6 \\ & 1 & -2 & 3 & -5 \end{array}$$

$$\frac{f(x)}{x+2} = x^2 - 2x + 3 - \frac{5}{x+2}$$

3.) (5P) Skizzieren Sie die Funktion $x^2 + 2x + 13 + 4y^2 - 16y = 0$

Lösung:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 13 + 4y^2 - 16y &= 0 \\ (x+1)^2 + 4 \cdot (y-2)^2 &= -13 + 1 + 16 \\ \frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{1} &= 1 \\ x_0 = -1, y_0 = 2, a = 2, b = 1 & \end{aligned}$$



4) (5P) Bestimmen Sie das Newton-Interpolationspolynom zu folgender Meßreihe

x_i	1	0	-1
y_i	2	-1	-6

Wie lautet das Interpolationspolynom, wenn noch der Messpunkt x=2 mit dem Funktionswert y=9 hinzukommt?

Lösung:

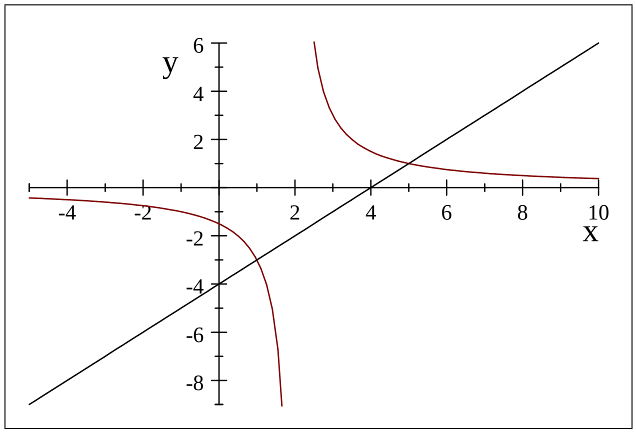
$$\begin{array}{cccccc} x_i & y_i & & & \\ 1 & 2 & \frac{-1-2}{0-1}=3 & \frac{5-3}{-1-1}=-1 & \frac{0+1}{2-1}=1 \\ 0 & -1 & \frac{-6+1}{-1-0}=5 & \frac{5-5}{2-0}=0 & \\ -1 & -6 & \frac{9+6}{2+1}=5 & & \\ 2 & 9 & & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} p_1(x) &= 2+3\cdot(x-1)-(-1)\cdot(x-1)\cdot x \\ p_2(x) &= 2+3\cdot(x-1)-(-1)\cdot(x-1)\cdot x+(x-1)\cdot x\cdot(x+1) \end{aligned}$$

5.) (5P) Bestimmen Sie die Lösungsmenge von

$$\frac{3}{x-2} > x-4$$

Lösung: Skizze: Wo ist die Hyperbel oberhalb der Geraden:



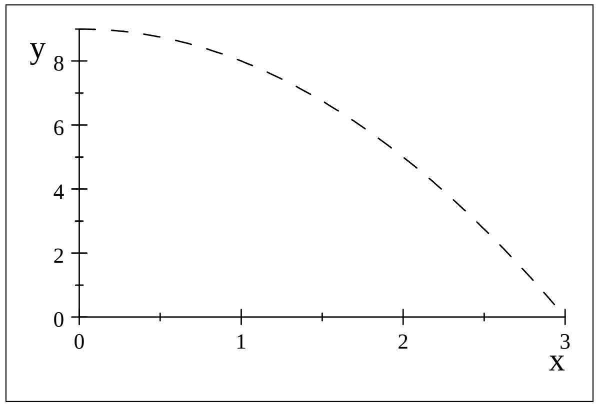
6) (6P) Differenzieren Sie:
a) $f(x) = ax^2 - bx\ln(x) + 1$ b) $f(x) = \sin(\ln(x))$ c) $f(x) = \frac{\ln(x)}{\sin(x)}$

$$
\begin{aligned}
a)\ f'(x) &= 2ax - b\ln(x) - b \\
b)\ f'(x) &= \frac{1}{x}\cos(\ln(x)) \\
c)\ f'(x) &= \frac{\sin(x)\cdot\frac{1}{x} - \ln(x)\cdot\cos(x)}{\sin^2(x)}
\end{aligned}
$$

:

7) (6P) Zwischen positiver x-Achse, positiver y-Achse und der Funktion $f(x) = 9 - x^2$ soll ein Rechteck möglichst großer Fläche gelegt werden. Skizzieren Sie zunächst das Problem und lösen Sie dieses anschließend mit Hilfe der Differentialrechnung

$$
\begin{aligned}
F(x) &= x\cdot(9 - x^2) = 9x - x^3 \\
F'(x) &= 9 - 3x^2 = 0 \\
x &= \sqrt{3} \\
F''(x) &= -6x \\
F''(\sqrt{3}) &= -6\sqrt{3} < 0 \text{ lok. Max.} \\
F(\sqrt{3}) &= 6\sqrt{3}
\end{aligned}
$$



8) (3P)
Wie groß muß der Parameter α gewählt werden, damit das Volumen des Spates der drei Vektoren

$$\overrightarrow{F_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \qquad \overrightarrow{F_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \text{und} \quad \overrightarrow{F_3} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

gerade 10 Volumeneinheiten ergibt?

Lösung:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F_1} \times \overrightarrow{F_2} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \left(\overrightarrow{F_1} \times \overrightarrow{F_2}\right) \cdot \overrightarrow{F_3} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \\ &= \alpha + 4 \end{aligned}$$

Variante 1:

$$\alpha + 4 = 10 \Longrightarrow \alpha = 6$$

Variante 2:

$$\alpha + 4 = -10 \Longrightarrow \alpha = -14$$

9) (4P) Eine Tierpopulation vermehre sich täglich um 10 Prozent. Weiterhin werden täglich 80 Tiere für einen Versuch entnommen. Wie lautet die Prozessgleichung bei einem Startwert von 700 Tieren? Wird die Population aussterben? Wenn ja, wann ?

Lösung:

$$\begin{aligned} \triangle y &= 0,1 \cdot y - 80 \\ y_0 &= 700 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_n &= \left(700 - \frac{80}{0,1}\right) 1,1^n + \frac{80}{0,1} \\ &= -100 \cdot 1,1^n + 800 \end{aligned}$$

Aussterben wegen $y_0 < \frac{a}{k}$

$$\begin{aligned} 0 &= -100 \cdot 1,1^n + 800 \\ 100 \cdot 1,1^n &= 800 \\ 1,1^n &= 8 \\ n &= \frac{\ln(8)}{\ln(1,1)} \end{aligned}$$

10) (4P) Wie lautet das Polynom 2. Grades, welches die Funktion

$$f(x) = e^{x+1} + x + 2$$

in $x_0 = -1$ bestmöglich approximiert?

Lösung:

$$\begin{array}{cc} f(x) = e^{x+1} + x + 2 & f(-1) = 2 \\ f'(x) = e^{x+1} + 1 & f'(-1) = 2 \\ f''(x) = e^{x+1} & f''(-1) = 1 \end{array}$$

$$f_2(x) = 2 + 2 \cdot (x+1) + \frac{1}{2} \cdot (x+1)^2$$

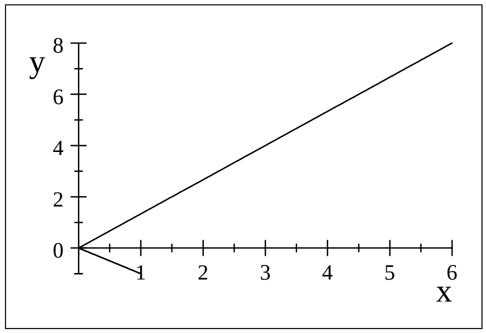
11) (5P) Berechnen Sie zu den komplexen Zahlen $z_1 = 1 - i$ und $z_2 = 6 + 8i$ die Werte

$$\begin{aligned} z_3 &= z_1 \cdot z_2, z_4 = \frac{z_1}{z_2} \\ z_5 &= z_1 + z_2, z_6 = z_2 - z_1 \end{aligned}$$

und zeichnen Sie die Zahlen z_1 und z_2 in ein Koordinatensystem.

Lösung:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (1-i) \cdot (6+8i) = 14 + 2i \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{1-i}{6+8i} = \frac{1-i}{6+8i} \cdot \frac{6-8i}{6-8i} = -\frac{1}{50} - \frac{7}{50}i \\ z_1 + z_2 &= (1-i) + (6+8i) = 7 + 7i \\ z_1 - z_2 &= (1-i) - (6+8i) = -5 - 9i \end{aligned}$$



12) (5P) Wie groß ist das Rotationsvolumen, wenn eine Gerade

$$y = f(x) = m \cdot x + n$$

im Bereich von $x = 0$ bis $x = 1$ um die x-Achse rotiert wird?

Lösung:

$$\begin{aligned}
V_0^1(m \cdot x + n) &= \int_0^1 \pi \cdot (mx+n)^2 \, dx \\
&= \pi \int_0^1 m^2x^2 + 2mnx + n^2 dx \\
&= \pi \left[m^2 \frac{1}{3} x^3 + mnx^2 + n^2 x \right]_0^1 \\
&= \pi \left(\frac{1}{3} m^2 + mn + n^2 \right)
\end{aligned}$$

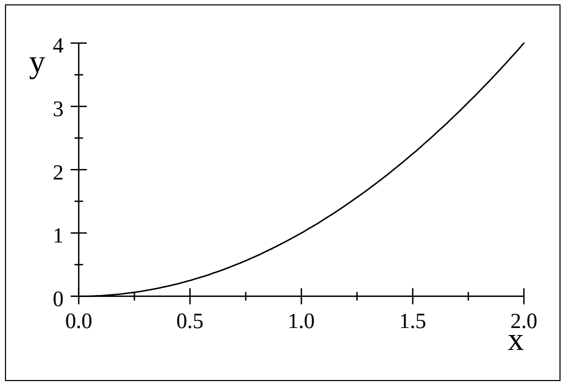
13) Es bewege sich ein Massenpunkt mit $\overrightarrow{X(t)} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$. Weiterhin ist ein ortsabhängiges Kraftfeld gegeben mit $\overrightarrow{F(x,y)} = \begin{pmatrix} x^2 - y + 1 \\ x \cdot y \end{pmatrix}$.

a) (1P) Skizzieren Sie den Weg von $t = 0$ bis $t = 2$.

b) (5P) Welche Arbeit wird verrichtet, wenn der Massenpunkt durch dieses Kraftfeld bewegt wird?

Lösung:

a)



b)

$$\overrightarrow{X'(t)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{F\left(\overrightarrow{X(t)}\right)} = \begin{pmatrix} t^2 - t^2 + 1 \\ t \cdot t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ t^3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} W &= \int_{t=0}^{2} \begin{pmatrix} 1 \\ t^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} dt \\ &= \int_{t=0}^{2} 1 + 2t^4 dt = \left[t + \frac{2}{5} t^5 \right]_o^2 \\ &= 2 + \frac{64}{5} = \frac{74}{5} \end{aligned}$$

14) (6P) Berechnen Sie die folgenden Integrale

a) $\int x \cdot e^{-x} dx$ b) $\int_0^{\pi^2} \frac{\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} dx$

Lösung:

a) partielle Integration $u = x, v' = e^{-x}$

$$\begin{aligned} \int x \cdot e^{-x} dx &= -x \cdot e^{-x} + \int e^{-x} dx \\ &= -x \cdot e^{-x} - e^{-x} + c \end{aligned}$$

b) Substitution $u = \sqrt{x}, \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\begin{aligned} \int_{x=0}^{\pi^2} \frac{\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} dx &= \int_{u=0}^{\pi} \sin(u) du = [-\cos(u)]_{u=0}^{\pi} \\ &= -\cos(\pi) + \cos(0) = 2 \end{aligned}$$

15) (4P) Berechnen Sie den Grenzwert von $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{\cos(x) - 1}$

Lösung:
Mit L'Hospital

$$lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{\cos(x) - 1} = lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{-\sin(x)} = lim_{x\to 0} \frac{e^x}{-\cos(x)} = -1$$

16) (3P) Wir betrachten die Reaktionsgleichung eines Stoffes mit der unbekannten Konzentration $y(t)$ und wissen für die Konzentrationsänderung gilt:

$$\frac{\triangle y}{\triangle t} = -0,03 \cdot y(t)$$

Wie lautet die kontiunierliche Prozessgleichung für eine Startkonzentration $y(0) = 0,5$?Wann ist die Konzentration auf $0,1$ gesunken?

Lösung:

$$y(t) = 0,5 \cdot e^{-0,03 \cdot t}$$

$$\begin{aligned} 0,1 &= 0,5 \cdot e^{-0,03 \cdot t} \\ \frac{1}{5} &= e^{-0,03 \cdot t} \\ \ln(\frac{1}{5}) &= -0,03 \cdot t \\ t &= \frac{\ln(5)}{0,03} \end{aligned}$$